
Stanford University Libraries
3 6105 000 993 712

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

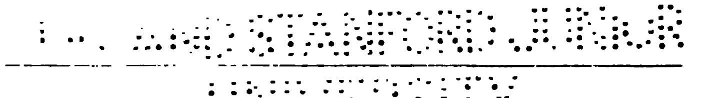
unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.



Vierundsiebzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1872.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des vierundsiebzigsten Bandes.

Collineare Grundgebilde und ihre Erzeugnisse. Von Herrn *Th. Reye* in Aachen. Seite 1

Ueber die mehrfachen *Gauss*ischen Summen. Von Herrn *H. Weber* in Zürich. — 14

Ueber die unendlich vielen Formen der ϑ-Function. Von Demselben. . — 57

Ueber binäre Formen. Von Herrn *S. Gundelfinger* in Tübingen. . . . . — 87

Ueber eine Eigenschaft der reciproken Curven. Von Herrn *M. Pasch* in Giessen. . . . . — 92

Ueber das Problem der drei Körper. Von Herrn *Otto Hesse* in München. — 97

Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn. — 116

Entwickelung eines Zusammenhanges zwischen den quadratischen Formen von n Differentialen und den *Abel*schen Transcendenten. Von Demselben. . . . . — 150

Die Elemente der Functionenlehre. Von Herrn *E. Heine* in Halle a/S. . — 172

Bestimmung der Anzahl involutorischer Elementenpaare einförmiger mehrdeutiger Gebilde. Von Herrn *Emil Weyr* in Prag. . . . . — 189

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von Herrn *L. W. Thomé*. — 193

Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Von Herrn *H. A. Schwarz* in Zürich. . . . . — 218

Ueber die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen, deren Coefficienten rationale Functionen einer Variablen sind. Von Herrn *G. Frobenius*. — 254

Zur Theorie der Determinanten. Von Herrn *J. J. Weyrauch*. . . . . . — 273

Ueber Normalen rationaler Raumcurven. Von Herrn *Emil Weyr* in Prag. — 277

Ueber die Anzahl der Doppelnormalen einer rationalen Raumcurve. Von Demselben. . . . . — 279

Ueber Auflösung von Gleichungen und Summation von Reihen durch bestimmte Integrale. Von Herrn ***Paul du Bois-Reymond*** in Freiburg i. Br. Seite 281

Théorème général concernant la grandeur relative des infinis des fonctions et de leurs dérivées. Von Demselben. . . . . — 294

Ueber eine geometrische Anwendung der complexen Multiplication der elliptischen Functionen. Von Herrn ***L. Kiepert*** in Freiburg i. Br. . . . — 305

Ueber die Entwicklung von Functionen nach den Integralen einer Klasse von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Von Herrn ***L. Pochhammer***. . . . . — 315

Bemerkung über die ebenen Schnitte der Flächen zweiten Grades. Von Herrn ***Mertens*** in Krakau. . . . . — 362

Collineare Grundgebilde und ihre Erzeugnisse.

(Von Herrn *Th. Reye* in Aachen.)

Noch vor dem Erscheinen von *Plückers* „Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement" habe ich in der zweiten Abtheilung meiner „Geometrie der Lage" einen Strahlencomplex zweiten Grades untersucht, welcher von collinearen Räumen erzeugt wird. Mit Hülfe desselben gelang es mir, einen synthetischen Beweis der fundamentalen Sätze über den Flächenbüschel zweiter Ordnung und seine Knotenlinie, die Raumcurve vierter Ordnung erster Species, aufzustellen. Neuerdings habe ich mich überzeugt, dass ein analoger Beweis auch für Flächenbüschel dritter und höherer Ordnung geführt werden kann, wenn an die Stelle des Strahlencomplexes ein Complex von Raumcurven vierter und höherer Ordnung gesetzt wird. Diese weitere Ausbildung meiner Beweismethode lässt indessen eine Vereinfachung derselben als wünschenswerth erscheinen; zugleich macht sie eine Berücksichtigung der speciellen Fälle, welche ich a. a. O. ausgeschlossen habe, erforderlich. Es sei mir deshalb gestattet, zunächst eine kürzere und einfachere Begründung der in Betracht kommenden Eigenschaften der von collinearen Grundgebilden erzeugten Strahlensysteme und -Complexe vorzulegen. Namentlich auch muss ich bei diesem Anlasse auf einige der Lehrsätze über das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe zurückkommen, welche ich früher im Zusammenhange, jedoch ohne Beweis, veröffentlicht habe *).

§. 1. Collineare Strahlenbündel.

1. Wir betrachten zunächst zwei nicht concentrische, collineare Strahlenbündel S_1 und S_2. Dieselben erzeugen ein Strahlensystem, zu welchem wir die sämmtlichen Schnittlinien von je zwei homologen Ebenen der Bündel rechnen. Wir wollen sogleich den ganz speciellen Fall erledigen, in welchem alle diese Schnittlinien in einer Ebene Π enthalten sind, also die Bündel

---

*) Dieses Journal Bd. 69.

zu einander und zu Π perspectivisch liegen. Projiciren wir die Ebene Π aus einem beliebigen Punkte S_3 der Geraden $\overline{S_1S_2}$, so erhalten wir einen dritten Strahlenbündel; derselbe ist durch Π collinear so auf die Bündel S_1 und S_2 bezogen, dass jede Ebene α_3 oder β_3 von S_3 alle Punkte enthält, welche die homologen Ebenen α_1 und α_2 resp. β_1 und β_2 von S_1 und S_2 mit einander gemein haben. Durchläuft S_3 die Gerade $\overline{S_1S_2}$, so beschreiben je zwei Ebenen α_3 und β_3 dieses Bündels um die Schnittlinien $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ und $\overline{\beta_1\beta_2}$ der homologen Ebenenpaare zwei perspectivische Ebenenbüschel.

2. *Wenn die collinearen Bündel S_1, S_2 weder concentrisch noch perspectivisch liegen, so erzeugen sie ein Strahlensystem erster Ordnung,* von welchem nämlich durch einen beliebigen Punkt A des Raumes im Allgemeinen ein einziger Strahl geht. Denn der Ebenenbüschel $\overline{S_1A}$ von S_1 erzeugt mit dem entsprechenden Büschel von S_2 im Allgemeinen eine zum Strahlensystem gehörige Regelschaar, von welcher nur ein Strahl durch A geht. Mehr als ein Strahl, nämlich unendlich viele Strahlen des Systemes gehen nur dann durch A, wenn die Axen jener beiden Ebenenbüschel sich in A begegnen, wenn also A ein Schnittpunkt von zwei homologen Strahlen der Bündel ist; und zwar bilden alle jene Strahlen einen gewöhnlichen Strahlenbüschel oder eine Kegelfläche zweiter Ordnung, jenachdem die projectivischen Ebenenbüschel $\overline{S_1A}$ und $\overline{S_2A}$, durch welche sie erzeugt werden, eine oder keine Ebene entsprechend gemein haben. Jede Regelschaar oder Kegelfläche zweiter Ordnung, welche durch zwei homologe Ebenenbüschel von S_1 und S_2 erzeugt wird, geht durch die sämmtlichen Schnittpunkte homologer Strahlen von S_1 und S_2; denn ein beliebiger dieser Schnittpunkte liegt allemal auf zwei einander entsprechenden Ebenen jener Büschel.

3. Zwei collineare, weder concentrisch noch perspectivisch liegende Strahlenbündel S_1, S_2 haben entweder gar kein Element entsprechend gemein, oder eine Ebene und keinen Strahl, oder endlich den Strahl $\overline{S_1S_2}$ und zwei reelle oder imaginäre Ebenen, die auch zusammenfallen können. Wir werden finden, dass das von ihnen erzeugte Strahlensystem erster Ordnung im ersten Falle von der dritten Classe ist, nämlich das Secantensystem einer Raumcurve dritter Ordnung, im zweiten Falle ist es von der zweiten, im dritten Falle von der ersten Classe; d. h. eine beliebige Ebene enthält im Allgemeinen höchstens drei Strahlen, zwei Strahlen, resp. einen einzigen Strahl des Systemes. Wir wollen der Reihe nach diese Strahlensysteme untersuchen.

§ 2. Die Raumcurve dritter Ordnung und ihr Secantensystem.

4. Wenn die collinearen Bündel S_1 und S_2 kein Element entsprechend gemein haben, so erzeugen je zwei homologe Ebenenbüschel derselben eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung, nämlich eine dem Strahlensystem angehörige Kegelfläche zweiter Ordnung oder Regelschaar, jenachdem die Axen der Büschel sich schneiden oder nicht. Je zwei dieser Flächen haben denjenigen Strahl des Systems mit einander gemein, welcher die vier Axen der sie erzeugenden Ebenenbüschel schneidet: sie begegnen sich folglich ausserdem in einer Raumcurve dritter Ordnung, in deren Punkten je zwei homologe Strahlen der Bündel S_1 und S_2 sich schneiden (2.). Jede Gerade, welche zwei Punkte dieser Raumcurve verbindet, ist ein Strahl des Strahlensystems; denn die beiden Punkte werden aus S_1 und S_2 durch zwei Paar homologe Strahlen, also ihre Verbindungslinie durch zwei homologe Ebenen der Bündel projicirt. Ueberhaupt können wir jeden Strahl des Systemes als Secante der Raumcurve auffassen, und zwar als eigentliche oder uneigentliche Secante oder als Tangente, jenachdem sie zwei reelle oder imaginäre oder zwei sich vereinigende Punkte mit der Curve gemein hat.

5. Zwei beliebige Secanten a, b können mit der Raumcurve durch eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung verbunden werden, welche eine Schaar von Secanten enthält; denn die Ebenenpaare, durch welche sie aus S_1 und S_2 projicirt werden, schneiden sich in den Axen von zwei homologen Ebenenbüscheln der collinearen Bündel, und diese Büschel erzeugen mit einander jene Fläche (4.). Da dieselbe Fläche auch von einer Geraden beschrieben wird, welche an der Raumcurve hingleitet und dabei beständig die Secanten a und b schneidet, so ergiebt sich der Satz: *Die Raumcurve dritter Ordnung wird aus je zwei ihrer Secanten durch zwei projectivische Ebenenbüschel projicirt;* denn die Ebenen, welche a und b mit jener beweglichen Geraden und folglich mit einem beweglichen Punkte der Raumcurve verbinden, beschreiben um a und b zwei projectivische Ebenenbüschel. Schneiden sich a und b in einem beliebigen Curvenpunkt, so ergiebt sich: *Die Raumcurve dritter Ordnung wird aus jedem ihrer Punkte durch eine Kegelfläche zweiter Ordnung projicirt; je zwei dieser Kegelflächen sind durch die Raumcurve projectivisch auf einander bezogen,* weil sie zu dem Ebenenbüschel, dessen Axe ihre Mittelpunkte mit einander verbindet, perspectivisch liegen. Weil keine dieser Kegelflächen in zwei Strahlenbüschel zerfällt (2.), so kann auch

die Raumcurve nicht in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen. Die Curve geht auch durch die Punkte S_1 und S_2, denn diese sind auf allen den vorhin erwähnten geradlinigen Flächen zweiter Ordnung enthalten.

6. Projiciren wir aus einem beliebigen Punkte S_3 der Raumcurve dritter Ordnung deren Secantensystem, so ist je zwei homologen Ebenen α_1 und α_2 der Bündel S_1 und S_2 eine durch ihre Schnittlinie $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ gehende Ebene α_3 von S_3 zugewiesen. Und da alle diejenigen Secanten, welche zwei homologe Ebenenbüschel von S_1 und S_2 mit einander erzeugen, auf einer durch S_3 gehenden Kegelfläche zweiter Ordnung oder Regelschaar liegen, so werden sie aus S_3 durch einen dritten Ebenenbüschel projicirt, dessen Axe ebenfalls auf der Kegelfläche liegt, resp. ein Leitstrahl der Regelschaar ist. Nicht nur entspricht also jeder Ebene von S_1 eine Ebene von S_3, sondern auch jedem Ebenenbüschel von S_1 ein gewöhnlicher Ebenenbüschel von S_3; d. h. die Bündel S_1 und S_3 sind auf die angegebene Art collinear auf einander bezogen. Also: *Aus zwei beliebigen ihrer Punkte wird die Raumcurve dritter Ordnung durch zwei projectivische Kegelflächen zweiter Ordnung* (5.) *und ihr Secantensystem durch zwei collineare Strahlenbündel projicirt.*

7. Daraus und aus (5.) schliessen wir: *Auf die collinearen Strahlenbündel S_1 und S_2 kann auf unendlich viele Arten ein dritter S_3 collinear bezogen werden, sodass jede Ebene α_3 oder β_3 des letzteren durch die Schnittlinie $\overline{\alpha_1\alpha_2}$, resp. $\overline{\beta_1\beta_2}$ der homologen Ebenenpaare von S_1 und S_2 hindurchgeht. Der Mittelpunkt S_3 dieses Bündels kann beliebig auf der von S_1 und S_2 erzeugten Raumcurve dritter Ordnung angenommen werden; und wenn er diese Curve durchläuft, so beschreiben je zwei Ebenen α_3 und β_3 desselben um die Schnittlinie der homologen Ebenenpaare zwei projectivische Ebenenbüschel.* — Eine beliebige Ebene enthält drei eigentliche Secanten oder eine uneigentliche Secante der Raumcurve, jenachdem sie mit letzterer drei reelle Punkte oder nur einen solchen S_3 gemein hat. Die Existenz der uneigentlichen Secante erkennt man im letzteren Falle sofort, wenn man S_3 als Mittelpunkt eines der collinearen, das Secantensystem erzeugenden Strahlenbündel betrachtet. Jede Berührungsebene der Curve enthält ausser der Tangente ihres Berührungspunktes noch eine durch letzteren gehende eigentliche Secante, welche sich jedoch mit der Tangente vereinigt, wenn die Berührungsebene in eine Schmiegungs- (Krümmungs-) Ebene übergeht.

§ 3. Das Strahlensystem erster Ordnung und zweiter Classe.

8. Wenn die collinearen Strahlenbündel S_1 und S_2 eine Ebene η, nicht aber den Strahl $\overline{S_1 S_2}$ entsprechend gemein haben, so erzeugen ihre in η liegenden homologen Strahlenbüschel eine durch S_1 und S_2 gehende Curve zweiter Ordnung k^2, in deren Punkten je zwei homologe Strahlen sich schneiden. Durch jeden Punkt von k^2 gehen unendlich viele, ausserhalb η liegende Strahlen des von S_1 und S_2 erzeugten Strahlensystemes; dieselben bilden einen gewöhnlichen Strahlenbüschel (2.). Die Ebenen von zwei beliebigen dieser Strahlenbüschel schneiden sich in einer Geraden v, deren Punkte ebenfalls Schnittpunkte homologer Strahlen von S_1 und S_2 sein müssen (2.), und welche mit k^2 einen Punkt gemein hat. Wenn wir absehen von der Ebene η, deren sämmtliche Strahlen als Schnittlinien homologer (nämlich zusammenfallender) Ebenen von S_1 und S_2 aufgefasst werden können, so ergiebt sich: *Die Schnittpunkte homologer Strahlen der collinearen Bündel S_1 und S_2 erfüllen eine Linie dritter Ordnung, welche in eine Gerade v und eine durch S_1 und S_2 gehende Curve k^2 zweiter Ordnung zerfällt, sodass v und k^2 sich in einem einzigen Punkte schneiden. Die sämmtlichen Schnittlinien homologer Ebenen von S_1 und S_2 haben sowohl mit v als auch mit k^2 einen Punkt gemein; und umgekehrt gehört jede Gerade, welche von v und k^2 in zwei verschiedenen Punkten geschnitten wird, dem von S_1 und S_2 erzeugten Strahlensystem an (vergl. 4.). Dieses System ist demnach von der ersten Ordnung und zweiten Classe.*

9. Projiciren wir aus zwei beliebigen Punkten T_1 und T_2 von k^2 diese Curve und die Gerade v durch zwei Paar Strahlenbüschel, so sind letztere durch k^2 und v projectivisch auf einander bezogen; und zwar entsprechen die gemeinschaftlichen Strahlen der beiden Büschelpaare von T_1 und T_2 einander, weil sie den Schnittpunkt von k^2 und v projiciren. Durch diese projectivische Beziehung jener Strahlenbüschel wird demnach eine collineare Verwandtschaft zwischen den Bündeln, deren Mittelpunkte T_1 und T_2 sind, hergestellt, und zwar so, dass je zwei homologe Ebenen dieser Bündel sich in einer Geraden schneiden, welche sowohl mit k^2 als auch mit v einen Punkt gemein hat. Also: *Das Strahlensystem erster Ordnung und zweiter Classe wird aus je zwei Punkten seiner Leitlinie k^2 zweiter Ordnung durch zwei collineare Strahlenbündel projicirt.* Eine Ausnahme macht nur der Schnitt-

punkt von k^2 und v, aus welchem das Strahlensystem durch den Ebenenbüschel v projicirt wird.

10. Demzufolge gilt auch der zu (7.) analoge Satz: *Projiciren wir dieses Strahlensystem aus einem von S_1 und S_2 verschiedenen Punkte S_3 der Leitlinie k^2, so erhalten wir einen dritten Strahlenbündel, welcher collinear so auf S_1 und S_2 bezogen ist, dass jede Ebene desselben alle gemeinschaftlichen Punkte der beiden homologen Ebenen von S_1 und S_2 enthält. Und wenn S_3 die Curve k^2 durchläuft, so beschreiben je zwei Ebenen α_3 und β_3 von S_3 um die Schnittlinie $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ und $\overline{\beta_1\beta_2}$ der homologen Ebenenpaare von S_1 und S_2 zwei projectivische Ebenenbüschel.* Wenn umgekehrt ein zu S_1 und S_2 collinearer Strahlenbündel S_3 dasselbe Strahlensystem mit S_1 und S_2 erzeugt, welches diese letzteren Bündel auch unter einander erzeugen, so liegt sein Mittelpunkt S_3 auf k^2, weil derselbe zu den Schnittpunkten homologer Strahlen von S_1 und S_2 gehört. Eine ähnliche Bemerkung kann zu (7.) gemacht werden.

§ 4. Das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe.

11. Wenn die collinearen Bündel S_1, S_2 den Strahl $\overline{S_1S_2}$ und höchstens zwei Ebenen η, φ desselben entsprechend gemein haben, so erzeugen ihre in η und φ liegenden homologen Strahlenbüschel zwei Punktreihen u, v, welche gleich jenen Ebenen beide reell oder imaginär sind oder zusammenfallen. Jeder Strahl des von S_1 und S_2 erzeugten Strahlensystemes, zu welchem auch $\overline{S_1S_2}$ gehört, wird von u und v geschnitten, und umgekehrt gehört jede Gerade, welche mit u und v je einen Punkt gemein hat, zu dem Strahlensysteme. Da weder alle Strahlen des Systemes durch einen Punkt gehen, noch (1.) in einer Ebene liegen, so müssen die Geraden u, v windschief zu einander liegen, falls sie nicht etwa zusammenfallen. Wir wollen sie die *Axen* des Strahlensystemes nennen. Sind beide Axen reell und von einander verschieden, so überzeugt man sich leicht ebenso wie oben (9.), dass das Strahlensystem aus zwei beliebigen Punkten des Strahles $\overline{S_1S_2}$ oder eines anderen seiner Strahlen durch zwei collineare Strahlenbündel projicirt wird. Von den folgenden Betrachtungen sind deshalb die meisten nur für den Fall imaginärer oder zusammenfallender Axen erforderlich.

12. *Durch das Strahlensystem wird eine beliebig durch $\overline{S_1S_2}$ gelegte Ebene Σ reciprok auf die Bündel S_1 und S_2 bezogen,* wenn wir nämlich jedem Punkte A von Σ diejenigen beiden Ebenen von S_1 und S_2 als entsprechende

zuweisen, welche in dem durch A gehenden Strahle des Systemes sich schneiden. Dass auf diese Art jeder Ebene von S_1 ein Punkt von Σ, und weil das System von der ersten Ordnung ist, auch umgekehrt jedem Punkte von Σ *eine* Ebene von S_1 zugewiesen ist, leuchtet ein. Ein beliebiger Ebenenbüschel s_1 von S_1 erzeugt aber mit dem entsprechenden von S_2 im Allgemeinen eine Regelschaar, welcher auch der Strahl $\overline{S_1S_2}$ angehört, und welche deshalb von Σ in einer Punktreihe s geschnitten wird; sodass zugleich jedem Strahle s_1 von S_1 eine Gerade s von Σ entspricht, wie behauptet wurde. Die Gerade $\overline{S_1S_2}$ entspricht sich selber. — Zwei beliebig durch $\overline{S_1S_2}$ gelegte Ebenen werden durch das Strahlensystem reciprok auf S_1 und folglich collinear auf einander bezogen; und zwar haben sie die Gerade S_1S_2, nicht aber alle Punkte derselben entsprechend gemein. Wir erhalten so eine *zweite Erzeugungsart des Strahlensystems:* jeder Strahl desselben verbindet zwei homologe Punkte jener collinearen Ebenen mit einander. Analog wie oben (2.) schliessen wir hieraus: *Das vorliegende Strahlensystem ist nicht nur von der ersten Ordnung, sondern auch von der ersten Classe.* Weiter ergiebt sich: *Das Strahlensystem wird aus zwei beliebigen Punkten des Strahles $\overline{S_1S_2}$ durch zwei collineare Strahlenbündel projicirt.* Der obige Satz 7. gilt deshalb auch für den vorliegenden Fall, wenn statt der Raumcurve dritter Ordnung der Strahl $\overline{S_1S_2}$ gesetzt wird.

13. Um alle Strahlen des Systems zu construiren, welche eine beliebige Gerade g schneiden, projiciren wir die Punktreihe g aus S_1 durch einen Strahlenbüschel, welchem in S_2 ein zu g projectivischer Strahlenbüschel entspricht. Letzterer erzeugt mit g im Allgemeinen einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung, welcher mit dem homologen Ebenenbüschel von S_1 die gesuchten Strahlen erzeugt. In einer durch $\overline{S_1S_2}$ gelegten Ebene Σ entspricht (12.) diesen Ebenenbüscheln zweiter Ordnung eine zu ihnen und folglich zur Punktreihe g projectivische Curve zweiter Ordnung, welche mit g den Schnittpunkt von Σ und g entsprechend gemein hat und deshalb mit g eine Regelschaar erzeugt. Also: *Diejenigen Strahlen des Systems, welche eine beliebige Gerade g schneiden, bilden im Allgemeinen eine Regelschaar.* Leicht übersehbare Ausnahmen erleidet dieser Satz nur dann, wenn g selbst dem Strahlensysteme angehört oder eine Axe desselben schneidet. *Drei zu einander windschiefe Strahlen des Systemes erster Ordnung und erster Classe bestimmen eine Regelschaar, deren sämmtliche Strahlen dem Systeme angehören;* zum

Beweise construire man eine Gerade g, welche die drei windschiefen Strahlen schneidet.

14. ***Durch vier seiner Strahlen, welche zu einander windschief, aber nicht in einer Regelschaar liegen, ist das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe völlig bestimmt.*** Denn demselben gehört jede durch drei der vier Strahlen gehende Regelschaar R an, sowie jede andere Regelschaar, welche den vierten Strahl mit zwei Strahlen von R verbindet; die Construction aller dieser Regelschaaren führt aber zu dem durch einen beliebig angenommenen Punkt gehenden Strahle des Systemes. Das Strahlensystem wird auch erzeugt durch zwei collineare Strahlenbündel, welche einen der vier Strahlen entsprechend gemein haben, und von denen drei Paare homologer Ebenen in den übrigen drei Strahlen sich schneiden; oder auch durch zwei collineare Ebenen, welche einen der vier Strahlen entsprechend gemein haben und von den übrigen in drei Paaren homologer Punkte geschnitten werden. Wir schliessen daraus: ***Das Strahlensystem wird aus je zwei auf einem seiner Strahlen liegenden Punkten durch collineare Strahlenbündel projicirt, und von je zwei durch einen seiner Strahlen gehenden Ebenen in collinearen Punktsystemen geschnitten.***

15. Es seien durch das Strahlensystem zwei beliebige Ebenen α_1, β_1 des Bündels S_1 collinear auf die entsprechenden Ebenen α_2, β_2 von S_2 bezogen. Da alsdann jedem Schnittpunkte von α_1 und β_1 ein einziger Schnittpunkt von α_2 und β_2 entspricht, so führt diese Beziehung zu einer besonderen collinearen Verwandtschaft von zwei Räumen Σ_1 und Σ_2, wenn wir nämlich α_1 und β_1 zu Σ_1 und α_2, β_2 als homologe Ebenen zu Σ_2 rechnen. Nämlich diese Räume haben alle Strahlen des Strahlensystemes entsprechend gemein, weil jeder solcher Strahl zwei Punkte von α_1 und β_1, zugleich aber die entsprechenden beiden Punkte von α_2 und β_2 mit einander verbindet. Von den collinearen Räumen Σ_1 und Σ_2 müssen also je zwei homologe Punkte auf einem Strahle des Systemes liegen und je zwei homologe Ebenen in einem solchen Strahle sich schneiden. Und das Strahlensystem wird sowohl durch zwei beliebige homologe Bündel als auch durch je zwei homologe (nicht zusammenfallende) Ebenen der collinearen Räume erzeugt. Wenn das Strahlensystem zwei reelle Axen besitzt, so haben Σ_1 und Σ_2 jeden Punkt und jede Ebene derselben entsprechend gemein.

§. 5. Collineare Ebenen.

16. Zwei collineare Ebenen, die weder perspectivisch noch in einander liegen, erzeugen, wie schon mittelst des Princips der Dualität sich ergiebt, ein Strahlensystem erster Classe und erster, zweiter oder dritter Ordnung; zu demselben rechnen wir jede Verbindungslinie von zwei homologen Punkten der Ebenen. Das Strahlensystem erster Classe und dritter Ordnung besteht aus den sämmtlichen *Axen* eines Ebenenbüschels dritter Ordnung, d. h. aus allen Geraden, in welchen je zwei Ebenen dieses Büschels oder was dasselbe ist zwei Schmiegungsebenen einer Raumcurve dritter Ordnung sich schneiden; es wird von den Ebenen des genannten Büschels dritter Ordnung in collinearen Punktsystemen geschnitten. Das Strahlensystem erster Classe und zweiter Ordnung hat eine Gerade v und eine von v berührte Kegelfläche K^2 zweiter Classe zu Directricen; es enthält jeden Strahl, welcher K^2 berührt und zugleich v schneidet, und wird von je zwei Berührungsebenen der Kegelfläche K^2 in collinearen Punktsystemen geschnitten. Die Beweise dieser Sätze sind denjenigen der §§. 2 und 3 ganz analog.

§. 6. Collineare Räume.

17. Zwei collineare Räume Σ_1 und Σ_2 liegen entweder perspectivisch, sodass sie alle Strahlen und Ebenen eines Punktes P (des Collineations-Centrums) und alle Punkte und Strahlen einer Collineations-Ebene Π entsprechend gemein haben, oder ihre entsprechend gemeinschaftlichen Strahlen bilden ein System erster Ordnung und erster Classe (15.), oder ferner ihre entsprechend gemeinschaftlichen Ebenen bilden einen Ebenenbüschel erster Ordnung und ihre entsprechend gemeinschaftlichen Punkte eine Punktreihe, oder endlich sie haben höchstens vier Ebenen, vier Punkte und sechs Strahlen, nämlich die Flächen, Eckpunkte und Kanten eines Tetraeders entsprechend gemein. Für alle diese verschiedenen Fälle werden wir den folgenden Satz beweisen: *Zu zwei collinearen Räumen Σ_1 und Σ_2 kann auf unendlich viele Arten ein dritter Σ_3 construirt werden, sodass von je drei homologen Ebenen dieser Räume jede durch alle gemeinschaftlichen Punkte der andern beiden hindurchgeht. Es kann nämlich die Ebene α_3 von Σ_3, welche zwei nicht zusammenfallenden homologen Ebenen α_1 und α_2 von Σ_1 und Σ_2 entsprechen soll, willkürlich durch die Schnittlinie $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ der letzteren gelegt werden; da-*

durch ist aber zu jedem anderen Ebenenpaar β_1, β_2 von Σ_1 und Σ_2 die entsprechende Ebene β_3 von Σ_3 völlig bestimmt. Lässt man α_3 um $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ einen Ebenenbüschel beschreiben, so beschreibt β_3 um $\overline{\beta_1\beta_2}$ einen projectivischen Ebenenbüschel.

18. Für den Fall, dass die entsprechend gemeinschaftlichen Strahlen von Σ_1 und Σ_2 ein System erster Ordnung und erster Classe bilden, ist der Beweis vorstehenden Satzes schon im Obigen (14. und 15.) enthalten. Liegen die Räume Σ_1 und Σ_2 perspectivisch, so muss auch der gesuchte Raum Σ_3 mit ihnen alle Elemente des Centrums P und der Ebene Π der Collineation entsprechend gemein haben. Legen wir also durch die in Π erhaltene Schnittlinie der homologen Ebenen α_1, α_2 von Σ_1 und Σ_2 ganz beliebig die ihnen entsprechende Ebene α_3 von Σ_3, so müssen je drei homologe Punkte S_1, S_2, S_3 dieser Ebenen α_1, α_2, α_3 mit dem Centrum P in einer Geraden liegen. Die Strahlenbündel S_1 und S_3 müssen perspectivisch auf einander bezogen werden, so dass ihre homologen Elemente sich auf der Ebene Π schneiden; und da die Räume Σ_1 und Σ_3 ausserdem den Bündel P entsprechend gemein haben müssen, so ist in der That ihre collineare Verwandtschaft völlig bestimmt. Der letzte Theil des Satzes (17.) ergiebt sich daraus, dass die drei Strahlen $\overline{\alpha_1\beta_1}$, $\overline{\alpha_2\beta_2}$ und $\overline{\alpha_3\beta_3}$ als homologe Strahlen der drei Räume sich in einem Punkte von Π schneiden und zugleich in einer und derselben Ebene des Centrums P liegen.

§ 7. Der Strahlencomplex zweiten Grades, welcher von zwei collinearen Räumen erzeugt wird.

19. Wenn die collinearen Räume Σ_1 und Σ_2 weder perspectivisch liegen noch die Strahlen eines Systemes erster Ordnung und erster Classe entsprechend gemein haben, so erzeugen sie einen Strahlencomplex, zu welchem wir jede Schnittlinie von zwei homologen Ebenen der Räume rechnen. Jeder Strahl des Complexes, als Element von Σ_1 betrachtet, liegt mit dem entsprechenden Strahle von Σ_2 in einer Ebene und unterscheidet sich dadurch von einem beliebigen Strahle des Raumes; rechnet man den Schnittpunkt der beiden homologen Strahlen zum Raume Σ_2, so liegt der entsprechende Punkt von Σ_1 auf dem zuerst angenommenen Complexstrahle, sodass die Strahlen des Complexes auch als Verbindungslinien homologer Punkte von Σ_1 und Σ_2

aufgefasst werden können. *Der Strahlencomplex wird also in doppelter Weise von den collinearen Räumen erzeugt; er ist sich selbst reciprok.*

20. Zwei homologe Strahlenbündel von Σ_1 und Σ_2 erzeugen mit einander das Secantensystem einer Raumcurve dritter Ordnung, welche eine *Ordnungscurve* des Strahlencomplexes heissen soll, weil zu letzterem alle ihre Secanten gehören. Diese Curve kann (8.) in eine Curve zweiter Ordnung und eine Gerade zerfallen und muss zerfallen, wenn die Räume Σ_1 und Σ_2 einen Ebenenbüschel entsprechend gemein haben. Alle durch die Mittelpunkte der Bündel gehenden Secanten der Raumcurve liegen in zwei Kegelflächen zweiter Ordnung, woraus folgt: *Die sämmtlichen Strahlen des Complexes, welche durch einen beliebigen Punkt gehen, erfüllen eine Kegelfläche zweiter Ordnung,* welche jedoch auch in zwei Strahlenbüschel zerfallen kann; ebenso folgt aus der zweiten Erzeugungsart: *Alle in einer Ebene liegenden Complexstrahlen bilden einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung.* Nach *Plücker* ist demnach der Complex vom zweiten Grade.

21. Eine Ausnahme von den letzten Sätzen machen die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte und Ebenen der Räume Σ_1 und Σ_2, indem ihre sämmtlichen Strahlen dem Complexe angehören. Ich nenne sie *Hauptpunkte* resp. *Hauptebenen* des Complexes. Sämmtliche Hauptpunkte sind auf jeder Ordnungscurve enthalten, weil in ihnen je zwei homologe Strahlen der erzeugenden Strahlenbündel sich schneiden; die Hauptpunkte bilden entweder eine Punktreihe, oder es giebt deren höchstens vier (17.). *Zwei beliebige Complexstrahlen a, b können allemal durch eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung verbunden werden, welche durch alle Hauptpunkte hindurchgeht und eine Schaar von Complexstrahlen enthält.* Nämlich die homologen Ebenen α_1, α_2 und β_1, β_2 von Σ_1 und Σ_2, welche in a und b sich schneiden, bestimmen in den collinearen Räumen die Axen $\overline{\alpha_1\beta_1}$ und $\overline{\alpha_2\beta_2}$ von zwei homologen Ebenenbüscheln, und diese Büschel erzeugen mit einander jene Schaar von Complexstrahlen. Wenn der Complex nur vier reelle Hauptpunkte besitzt, welche alsdann ein Tetraeder bilden, so ergiebt sich aus dem letzten Satze: *Die Eckpunkte des Haupttetraeders werden aus je zwei Complexstrahlen durch zwei projectivische Ebenenbüschel projicirt.* *) Ebenso führt die zweite Erzeugungsart des Complexes zu dem reciproken Satze: *Die Flächen des Haupt-*

*) Diese und die folgende Fundamentaleigenschaft des vorliegenden Complexes zweiten Grades wurde zuerst von Herrn *H. Müller* in den „mathem. Annalen" Bd. I ausgesprochen.

tetraeders werden von je zwei Complexstrahlen in projectivischen Punktreihen geschnitten. Die Aufgabe (15.) im Anhange der „Systemat. Entwickelung der Abhängigkeit cet.“ erhält dadurch eine andere als die von *Jacob Steiner* erwartete Auflösung.

22. *Drei beliebige Complexstrahlen a, b, c bestimmen im Allgemeinen eine Ordnungscurve des Complexes, deren Secanten sie sind.* Der Satz erleidet eine Ausnahme, wenn die drei Ebenenpaare von Σ_1 und Σ_2, welche in a, b und c sich schneiden, zwei homologen Ebenenbüscheln der collinearen Räume angehören; ist dieses nicht der Fall, so bestimmen sie in Σ_1 und Σ_2 zwei homologe Strahlenbündel, welche die genannte Ordnungscurve und ihr Secantensystem erzeugen. Wenn zwei von den Strahlen a, b, c sich schneiden, so geht diese Curve durch den Schnittpunkt hindurch. *Eine Ordnungscurve des Complexes ist völlig bestimmt, wenn von ihr gegeben sind eine Secante a und ein ausserhalb a liegender Punkt B.* Die durch B gehenden Complexstrahlen werden nämlich durch zwei homologe Ebenenbüschel von Σ_1 und Σ_2 erzeugt, und deren Axen haben mit den beiden in a sich schneidenden homologen Ebenen die Mittelpunkte der beiden Strahlenbündel von Σ_1 und Σ_2 gemein, durch welche die Ordnungscurve erzeugt wird.

23. *Zwei beliebige Ebenen, welche einen Complexstrahl a mit einander gemein haben, werden von denjenigen Ordnungscurven, von welchen a eine Secante ist, in collinearen Punktsystemen geschnitten.* Seien nämlich α_1 und α_2 die beiden in a sich schneidenden, homologen Ebenen von Σ_1 und Σ_2 und α_3 irgend eine dritte durch a gelegte Ebene. Die genannten Ordnungscurven werden dann durch je zwei homologe Strahlenbündel von Σ_1 und Σ_2 erzeugt, deren Mittelpunkte S_1 und S_2 homologe Punkte der collinearen Ebenen α_1, α_2 sein müssen; sie haben mit α_3 noch je einen Punkt S_3 gemein, welcher im Allgemeinen ausserhalb der Secante a liegt und den Punkten S_1, S_2 durch die betreffende Ordnungscurve zugewiesen ist. Beschreibt nun S_1 in α_1 eine Gerade s_1, so beschreibt die von den Bündeln S_1 und S_2 erzeugte Ordnungscurve diejenige geradlinige Fläche zweiter Ordnung, welche der Ebenenbüschel s_1 von Σ_1 mit dem entsprechenden Ebenenbüschel s_2 von Σ_2 erzeugt. Diese Fläche geht durch den Complexstrahl a, wird also von α_3 noch in einer Geraden s_3 geschnitten, auf welcher der Punkt S_3 fortrücken muss. Die Verwandtschaft der Ebenen α_1 und α_3 ist also von der Art, dass jedem Punkte S_1 von α_1 ein Punkt S_3 von α_3 und jeder durch S_1 gehenden Geraden s_1 von α_1 eine durch S_3 gehende Gerade s_3 von α_3 entspricht; d. h. sie ist eine col-

lineare. Jede vierte, durch a gehende Ebene α_4 wird ebenso durch die Ordnungscurven collinear auf α_1 und folglich auch auf α_3 bezogen, wie behauptet wurde.

24. Es ist jetzt ein Leichtes, den oben (17.) aufgestellten Satz auch für solche collineare Räume zu beweisen, welche einen Strahlencomplex zweiten Grades erzeugen. Aus je drei homologen Punkten S_1, S_2, S_3 der Ebenen α_1, α_2, α_3 wird das Secantensystem der jene Punkte verbindenden Ordnungscurve durch collineare Bündel projicirt (5. und 10.); rechnen wir also α_3 und die Bündel S_3 zum Raume Σ_3, so ist auf diese Art je zwei homologen Ebenen β_1, β_2 von Σ_1 und Σ_2 eine durch die Schnittlinie $\overline{\beta_1\beta_2}$ gehende, entsprechende Ebene β_3 in Σ_3 zugewiesen. Diese zwischen Σ_3 und Σ_1, Σ_2 hergestellte Beziehung ist aber eine collineare, weil (23.) auch β_3 durch die Ordnungscurven des Complexes collinear auf β_1 und β_2 bezogen ist. Um auch den letzten Theil des Satzes (17.) zu beweisen, bemerken wir, dass die Ebenenpaare $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$ und $\alpha_3\beta_3$ drei homologen Ebenenbüscheln der Räume Σ_1, Σ_2, Σ_3 angehören und folglich eine und dieselbe geradlinige Fläche zweiter Ordnung erzeugen müssen, auf welcher auch die Axen dieser Büschel liegen. Die Axe $\overline{\alpha_3\beta_3}$ beschreibt diese Fläche, wenn α_3 um die Gerade $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ einen Ebenenbüschel beschreibt; und folglich muss β_3 um $\overline{\beta_1\beta_2}$ einen zu $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ projectivischen Ebenenbüschel beschreiben, wie der Satz (17.) behauptet.

25. Zum Schluss führe ich noch den zu (17.) reciproken Satz an, dessen ganz analoger Beweis auf § 5 sich stützt: *Zu zwei collinearen Räumen Σ_1 und Σ_2 kann auf unendlich viele Arten ein dritter Σ_3 construirt werden, sodass von je drei homologen Punkten dieser Räume jeder auf allen durch die übrigen zwei gehenden Ebenen liegt. Es kann nämlich der Punkt A_3 von Σ_3, welcher zwei homologen Punkten A_1 und A_2 von Σ_1 und Σ_2 entsprechen soll, willkürlich auf der Verbindungslinie $\overline{A_1A_2}$ der letzteren angenommen werden; dadurch ist aber zu jedem anderen Punktenpaare B_1, B_2 von Σ_1 und Σ_2 der entsprechende B_3 in Σ_3 völlig bestimmt. Lässt man A_3 die Punktreihe $\overline{A_1A_2}$ durchlaufen, so beschreibt B_3 in $\overline{B_1B_2}$ eine zu $\overline{A_1A_2}$ projectivische Punktreihe.*

Aachen, den 6. Decbr. 1870.

Ueber die mehrfachen *Gauss*ischen Summen.

(Von Herrn *H. Weber* in Zürich.)

Schon *Jacobi* hat ausgesprochen, dass für die Constantenbestimmung in der Theorie der unendlich vielen Formen der elliptischen ϑ-Function die von *Gauss* zuerst zu Zwecken der Zahlentheorie untersuchten Summen *) von Wichtigkeit seien. Die schöne Durchführung der erwähnten Constantenbestimmung von Herrn *Hermite* hat *Jacobis* Ausspruch zur Genüge bestätigt. Bei dem Versuch, in der Theorie der ϑ-Functionen von mehreren Veränderlichen zu ähnlichen Resultaten zu gelangen, stiess ich auf die Aufgabe, Summen zu bestimmen, die den *Gauss*ischen analog sind, aber von mehreren veränderlichen Zahlen abhängen. Das Ergebniss dieser Untersuchung, welches mir nicht ganz ohne ein selbständiges Interesse zu sein scheint, erlaube ich mir hier mitzutheilen. Natürlich macht sich die Nothwendigkeit der Unterscheidung mehrerer Fälle, die schon bei den einfachen *Gauss*ischen Summen eintritt, hier in erhöhtem Masse geltend. Gleichwohl ist das Resultat in einigen der Hauptfälle von einer Einfachheit und Eleganz, die kaum zu erwarten war. Die Summen, welche *Gauss* untersucht hat, sind von der Form:

$$\sum_s e^{\frac{2\pi i}{n} c s^2},$$

worin c und n ganze Zahlen sind, und s ein vollständiges Restsystem nach dem Modul n zu durchlaufen hat. Der Werth der Summe ist unabhängig von der Wahl des Restsystems.

Die Verallgemeinerung dieser Summe, um welche es sich in der vorliegenden Arbeit handelt, ist:

$$\sum_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{2\pi i}{n} \sum_\varkappa \sum_\lambda c_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda},$$

worin:

$$\sum_\varkappa \sum_\lambda c_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda = c_{11} s_1^2 + 2 c_{12} s_1 s_2 + \cdots + c_{pp} s_p^2.$$

c und n sind ganze Zahlen, und die $s_1, s_2, \dots s_p$ haben, von einander un-

---

*) „Summatio quarundam serierum singularium", *Gauss*' Werke, Bd. II, p. 9. *Dirichlet,* Vorlesungen über Zahlentheorie herausgegeben von *Dedekind.* Supplement I.

abhängig, je ein vollständiges Restsystem nach dem Modul n zu durchlaufen. Auch der Werth dieser Summe ist von der Wahl der Restsysteme unabhängig. Dass die Coefficienten der Producte $s_1 s_2, \ldots$ als gerade Zahlen angenommen werden, ist keine Beschränkung; denn wäre dies nicht der Fall, so hätte man Zähler und Nenner im Exponenten mit 2 zu multipliciren, wodurch, da alsdann der Modul der Restsysteme $2n$ wird, der 2^pfache Werth der Summe erhalten wird. Ist n ungerade, so kann man auch ohne Veränderung des Nenners denselben Zweck erreichen, indem man zu den ungeraden $2c_{\varkappa\lambda}$ den Nenner n hinzufügt, wodurch der Werth der Summe augenscheinlich nicht geändert wird.

Ist nun

$$n = \mu_1 n_1 = \mu_2 n_2 = \cdots = \mu_p n_p$$

und μ_i der grösste Theiler, den n mit $c_{1i}, c_{2i}, \ldots c_{pi}$ gemein hat, so lässt sich die Summe auf eine andere mit weniger Gliedern reduciren. Setzt man nämlich:

$$c_{\varkappa\lambda} = \mu_\lambda \gamma_\lambda^{(\varkappa)} = \mu_\varkappa \gamma_\varkappa^{(\lambda)},$$

woraus folgt:

$$\frac{\gamma_\lambda^{(\varkappa)}}{n_\lambda} = \frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)}}{n_\varkappa},$$

und:

$$\begin{aligned} f(s_1, s_2, \ldots s_p) = & \frac{s_1(s_1\gamma_1^{(1)} + s_2\gamma_1^{(2)} + \cdots + s_p\gamma_1^{(p)})}{n_1} \\ & + \frac{s_2(s_1\gamma_2^{(1)} + s_2\gamma_2^{(2)} + \cdots + s_p\gamma_2^{(p)})}{n_2} \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{s_p(s_1\gamma_p^{(1)} + s_2\gamma_p^{(2)} + \cdots + s_p\gamma_p^{(p)})}{n_p}, \end{aligned}$$

so ist auch die Summe:

$$\sum_{s_1, s_2, \ldots s_p} e^{2\pi i f(s_1, s_2, \ldots s_p)},$$

wenn $s_1, s_2, \ldots s_p$ je ein vollständiges Restsystem nach den Moduln $n_1, n_2, \ldots n_p$ durchläuft, von der Wahl dieser Restsysteme unabhängig, und es folgt:

$$\sum_{s_1, s_2, \ldots s_p} e^{\frac{2\pi i}{n} \sum_\varkappa \sum_\lambda c_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda} = \mu_1 . \mu_2 . \ldots . \mu_p \sum_{s_1, s_2, \ldots s_p} e^{2\pi i f(s_1, s_2, \ldots s_p)}.$$

Für die letztere Summe soll im Folgenden die Bezeichnung gebraucht werden:

$$\sum_{s_1, s_2, \ldots s_p} e^{2\pi i f(s_1, s_2 \ldots s_p)} = \varphi \begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}, & \ldots & \gamma_1^{(p)} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}, & \ldots & \gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(1)}, & \gamma_p^{(2)}, & \ldots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix} (n_1, n_2, \ldots n_p),$$

die auch, wo es ohne Zweideutigkeit geschehen kann, in den abgekürzten Formen angewendet werden wird:

$$\varphi\{\gamma\}(n); \qquad \varphi\{\gamma\}(n_1, n_2, \dots n_p).$$

§. 1.

Allgemeine Sätze über die Function φ.

Ueber die Function φ gelten ganz analoge Sätze, wie über die *Gauss*-ische Reihe *).

I. Der erste dieser Sätze ist in folgenden Gleichungen enthalten:

$$\varphi\{\gamma\}(n) = \varphi\left\{\begin{matrix} \gamma_1^{(1)}+\lambda_1^{(1)}n_1, & \gamma_1^{(2)}+\lambda_1^{(2)}n_1, & \dots & \gamma_1^{(p)}+\lambda_1^{(p)}n_1 \\ \gamma_2^{(1)}+\lambda_2^{(1)}n_2, & \gamma_2^{(2)}+\lambda_2^{(2)}n_2, & \dots & \gamma_2^{(p)}+\lambda_2^{(p)}n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(1)}+\lambda_p^{(1)}n_p, & \gamma_p^{(2)}+\lambda_p^{(2)}n_p, & \dots & \gamma_p^{(p)}+\lambda_p^{(p)}n_p \end{matrix}\right\}(n_1, n_2, \dots n_p),$$

worin $\lambda_i^{(k)}$ ganze Zahlen sind, die der Bedingung genügen:

$$\lambda_i^{(k)} = \lambda_k^{(i)}.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich unmittelbar aus dem Anblick der Reihe. Dieser Satz kann dazu dienen um alle Coefficienten $\gamma_k^{(1)}, \gamma_k^{(2)}, \dots \gamma_k^{(p)}$ kleiner als n_k zu machen.

II. Ist a_1 relative Primzahl zu n_1,
a_2 – – – n_2,
. . . .
a_p – – – n_p,

so hat man die Gleichung:

$$\varphi\{\gamma\}(n) = \varphi\left\{\begin{matrix} a_1a_1\gamma_1^{(1)}, & a_1a_2\gamma_1^{(2)}, & \dots & a_1a_p\gamma_1^{(p)} \\ a_2a_1\gamma_2^{(1)}, & a_2a_2\gamma_2^{(2)}, & \dots & a_2a_p\gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_pa_1\gamma_p^{(1)}, & a_pa_2\gamma_p^{(2)}, & \dots & a_pa_p\gamma_p^{(p)} \end{matrix}\right\}(n_1, n_2, \dots n_p).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hat nämlich den Werth:

$$\sum_{s_1}\sum_{s_2}\dots\sum_{s_p} e^{2\pi i f(a_1s_1, a_2s_2, \dots a_ps_p)}.$$

---

*) Vgl. *Dirichlet,* Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von *Dedekind,* pag. 323.

Nun durchlaufen aber $a_1 s_1$ und s_1; $a_2 s_2$ und s_2; ... $a_p s_p$ und s_p gleichzeitig vollständige Restsysteme resp. nach den Moduln $n_1, n_2, \dots n_p$, so dass

$$\Sigma e^{2\pi i f(a_1 s_1, a_2 s_2, \dots a_p s_p)} = \Sigma e^{2\pi i f(s_1, s_2, \dots s_p)},$$

womit auch dieser Satz bewiesen ist.

III. Ist m_1 relative Primzahl zu n_1,

m_2 – – – n_2,

. . . .

m_p – – – n_p,

sind ferner die Grössen

$$\frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)} m_\lambda}{m_\varkappa}, \quad \frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)} n_\varkappa}{n_\lambda}$$

ganze Zahlen, bestehen endlich die Relationen

$$\frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)}}{m_\varkappa n_\varkappa} = \frac{\gamma_\lambda^{(\varkappa)}}{m_\lambda n_\lambda},$$

so ist:

$$\varphi\begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}, & \dots & \gamma_1^{(p)} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}, & \dots & \gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(1)}, & \gamma_p^{(2)}, & \dots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(m_1 n_1, m_2 n_2, \dots m_p n_p)$$

$$= \varphi\begin{Bmatrix} m_1\gamma_1^{(1)}, & m_2\gamma_1^{(2)}, & \dots & m_p\gamma_1^{(p)} \\ m_1\gamma_2^{(1)}, & m_2\gamma_2^{(2)}, & \dots & m_p\gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_1\gamma_p^{(1)}, & m_2\gamma_p^{(2)}, & \dots & m_p\gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(n_1, n_2, \dots n_p) \times$$

$$\varphi\begin{Bmatrix} n_1\gamma_1^{(1)}, & n_2\gamma_1^{(2)}, & \dots & n_p\gamma_1^{(p)} \\ n_1\gamma_2^{(1)}, & n_2\gamma_2^{(2)}, & \dots & n_p\gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_1\gamma_p^{(1)}, & n_2\gamma_p^{(2)}, & \dots & n_p\gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(m_1, m_2, \dots m_p).$$

Auch dieser Satz lässt sich einfach beweisen: Bildet man nämlich das Product der beiden φ-Functionen auf der rechten Seite, so erhält man:

$$\sum_s \sum_t e^{2\pi i F},$$

worin

$$\begin{aligned} F = {} & \gamma_1^{(1)}\Big(\frac{m_1 s_1 s_1}{n_1} + \frac{n_1 t_1 t_1}{m_1}\Big) + \gamma_1^{(2)}\Big(\frac{m_2 s_1 s_2}{n_1} + \frac{n_2 t_1 t_2}{m_1}\Big) + \dots + \gamma_1^{(p)}\Big(\frac{m_p s_1 s_p}{n_1} + \frac{n_p t_1 t_p}{m_1}\Big) \\ & + \gamma_2^{(1)}\Big(\frac{m_1 s_2 s_1}{n_2} + \frac{n_1 t_2 t_1}{m_2}\Big) + \gamma_2^{(2)}\Big(\frac{m_2 s_2 s_2}{n_2} + \frac{n_2 t_2 t_2}{m_2}\Big) + \dots + \gamma_2^{(p)}\Big(\frac{m_p s_2 s_p}{n_2} + \frac{n_p t_2 t_p}{m_2}\Big) \\ & + \dots \\ & + \gamma_p^{(1)}\Big(\frac{m_1 s_p s_1}{n_p} + \frac{n_1 t_p t_1}{m_p}\Big) + \gamma_p^{(2)}\Big(\frac{m_2 s_p s_2}{n_p} + \frac{n_2 t_p t_2}{m_p}\Big) + \dots + \gamma_p^{(p)}\Big(\frac{m_p s_p s_p}{n_p} + \frac{n_p t_p t_p}{m_p}\Big). \end{aligned}$$

In der $2p$ fachen Summe nach s und t haben $s_1, s_2, \dots s_p$ vollständige Restsysteme nach den Moduln $n_1, n_2, \dots n_p$; $t_1, t_2, \dots t_p$ vollständige Restsysteme nach den Moduln $m_1, m_2, \dots m_p$ zu durchlaufen.

Nun ist aber:

$$\frac{m_\varkappa s_\lambda s_\varkappa}{n_\lambda} + \frac{n_\varkappa t_\lambda t_\varkappa}{m_\lambda} = \frac{(m_\varkappa s_\varkappa + n_\varkappa t_\varkappa)(m_\lambda s_\lambda + n_\lambda t_\lambda)}{m_\lambda n_\lambda} - \frac{m_\varkappa}{m_\lambda} s_\varkappa t_\lambda - \frac{n_\varkappa}{n_\lambda} s_\lambda t_\varkappa .$$

Gemäss der Voraussetzung, dass

$$\frac{m_\varkappa}{m_\lambda}\gamma_\lambda^{(\varkappa)}, \qquad \frac{n_\varkappa}{n_\lambda}\gamma_\lambda^{(\varkappa)}$$

ganze Zahlen seien, kann man also für F schreiben:

$$F = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \gamma_\lambda^{(\varkappa)} \frac{(m_\varkappa s_\varkappa + n_\varkappa t_\varkappa)(m_\lambda s_\lambda + n_\lambda t_\lambda)}{m_\lambda n_\lambda} - G,$$

wo G eine ganze Zahl ist, die auf den Werth der Summe keinen Einfluss hat, da sie im Exponenten von e mit $2\pi i$ multiplicirt ist.

Setzt man nun

$$m_\varkappa s_\varkappa + n_\varkappa t_\varkappa = \sigma_\varkappa$$

und lässt $s_\varkappa$, $t_\varkappa$ je ein vollständiges Restsystem nach den Moduln $n_\varkappa$, $m_\varkappa$ durchlaufen, so durchläuft $\sigma_\varkappa$ ein vollständiges Restsystem nach dem Modul $m_\varkappa n_\varkappa$; denn im Ganzen erhält man $m_\varkappa n_\varkappa$ Werthe von $\sigma_\varkappa$, und von diesen können keine zwei nach dem Modul $m_\varkappa n_\varkappa$ congruent sein. Ist nämlich:

$$m_\varkappa s_\varkappa + n_\varkappa t_\varkappa \equiv m_\varkappa s'_\varkappa + n_\varkappa t'_\varkappa \qquad (\text{mod. } m_\varkappa n_\varkappa),$$

so folgt:

$$m_\varkappa s_\varkappa \equiv m_\varkappa s'_\varkappa \qquad (\text{mod. } n_\varkappa),$$
$$n_\varkappa t_\varkappa \equiv n_\varkappa t'_\varkappa \qquad (\text{mod. } m_\varkappa).$$

Wenn also, wie vorausgesetzt, $m_\varkappa$ und $n_\varkappa$ relativ prim sind, so würde folgen:

$$s_\varkappa \equiv s'_\varkappa \qquad (\text{mod. } n_\varkappa),$$
$$t_\varkappa \equiv t'_\varkappa \qquad (\text{mod. } m_\varkappa).$$

Darnach wird unsere Summe:

$$\sum_\sigma e^{2\pi i \sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=p} \frac{\gamma_\lambda^{(\varkappa)}\sigma_\lambda\sigma_\varkappa}{m_\lambda n_\lambda}} .$$

Diese Summe aber ist $\varphi\{\gamma\}(m_1 n_1, m_2 n_2, \dots m_p n_p)$, was zu beweisen war.

§. 2.

Zurückführung der Bestimmung von $\varphi\{\gamma\}(n)$ auf den Fall, wo die n Potenzen einer und derselben Primzahl sind.

Den zuletzt bewiesenen Satz III. wenden wir nun auf den Fall an, wo die Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_p$ Potenzen einer und derselben Primzahl sind, welche in keiner der Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_p$ aufgeht.

Aus der Bedingung:

$$\frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)}}{m_\varkappa n_\varkappa} = \frac{\gamma_\lambda^{(\varkappa)}}{m_\lambda n_\lambda},$$

welche sich auch so schreiben lässt:

$$\frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)} m_\lambda}{m_\varkappa} = \frac{\gamma_\lambda^{(\varkappa)} n_\varkappa}{n_\lambda}$$

folgt hier von selbst, dass die andere Bedingung unseres Satzes befriedigt ist, denn da $m_\varkappa$ und n_λ keinen gemeinschaftlichen Factor haben können, so müssen:

$$\frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)} m_\lambda}{m_\varkappa}, \qquad \frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)} n_\lambda}{n_\varkappa}$$

ganze Zahlen sein. Demnach ist unser Satz hier anwendbar. Die wiederholte Anwendung dieses Satzes bietet nun ein Mittel, die allgemeine Bestimmung der Summe $\varphi\{\gamma\}(n)$ zurückzuführen auf den besonderen Fall, wo die Grössen n Potenzen einer und derselben Primzahl sind. Es sei nämlich:

$$\begin{aligned} n_1 &= \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots, \\ n_2 &= \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ n_p &= \alpha_p \beta_p \gamma_p \ldots, \end{aligned}$$

und es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ Potenzen einer und derselben Primzahl; $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ Potenzen einer zweiten Primzahl; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p$ einer dritten u. s. f., wobei natürlich auch die nullte Potenz nicht ausgeschlossen ist.

Berücksichtigt man nun die gleich zu Anfang gemachte Voraussetzung $\frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)}}{n_\varkappa} = \frac{\gamma_\lambda^{(\varkappa)}}{n_\lambda}$, so liefert der Satz III. §. 1 unmittelbar die folgende Zerlegung:

IV.

$$\varphi\{\gamma\}(n) =$$

$$\varphi\left\{\begin{matrix} \frac{n_1}{\alpha_1}\gamma_1^{(1)}, & \frac{n_2}{\alpha_2}\gamma_1^{(2)}, & \dots & \frac{n_p}{\alpha_p}\gamma_1^{(p)} \\ \frac{n_1}{\alpha_1}\gamma_2^{(1)}, & \frac{n_2}{\alpha_2}\gamma_2^{(2)}, & \dots & \frac{n_p}{\alpha_p}\gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{n_1}{\alpha_1}\gamma_p^{(1)}, & \frac{n_2}{\alpha_2}\gamma_p^{(2)}, & \dots & \frac{n_p}{\alpha_p}\gamma_p^{(p)} \end{matrix}\right\}(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p) \times$$

$$\varphi\left\{\begin{matrix} \frac{n_1}{\beta_1}\gamma_1^{(1)}, & \frac{n_2}{\beta_2}\gamma_1^{(2)}, & \dots & \frac{n_p}{\beta_p}\gamma_1^{(p)} \\ \frac{n_1}{\beta_1}\gamma_2^{(1)}, & \frac{n_2}{\beta_2}\gamma_2^{(2)}, & \dots & \frac{n_p}{\beta_p}\gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{n_1}{\beta_1}\gamma_p^{(1)}, & \frac{n_2}{\beta_2}\gamma_p^{(2)}, & \dots & \frac{n_p}{\beta_p}\gamma_p^{(p)} \end{matrix}\right\}(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_p) \times$$

$$\varphi\left\{\begin{matrix} \frac{n_1}{\gamma_1}\gamma_1^{(1)}, & \frac{n_2}{\gamma_2}\gamma_1^{(2)}, & \dots & \frac{n_p}{\gamma_p}\gamma_1^{(p)} \\ \frac{n_1}{\gamma_1}\gamma_2^{(1)}, & \frac{n_2}{\gamma_2}\gamma_2^{(2)}, & \dots & \frac{n_p}{\gamma_p}\gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{n_1}{\gamma_1}\gamma_p^{(1)}, & \frac{n_2}{\gamma_2}\gamma_p^{(2)}, & \dots & \frac{n_p}{\gamma_p}\gamma_p^{(p)} \end{matrix}\right\}(\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_p) \times \cdots$$

Kommen unter den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$; $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_p$; $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_p$; cet. nullte Potenzen, d. h. Einheiten vor, so reduciren sich die betreffenden Summen φ auf solche, in denen p einen geringeren Werth hat, so dass, wenn z. B. $\alpha_1 = 1$ wäre, die erste Summe auf der rechten Seite von IV. in folgende überginge:

$$\varphi\left\{\begin{matrix} \frac{n_2}{\alpha_2}\gamma_2^{(2)}, & \dots & \frac{n_p}{\alpha_p}\gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{n_2}{\alpha_2}\gamma_p^{(2)}, & \dots & \frac{n_p}{\alpha_p}\gamma_p^{(p)} \end{matrix}\right\}(\alpha_2, \dots \alpha_p).$$

§. 3.

Bestimmung von $\varphi\{\gamma\}(q, q, \dots q)$, wenn q eine ungerade Primzahl ist.

Die Bedingung

$$\frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)}}{n_\varkappa} = \frac{\gamma_\lambda^{(\varkappa)}}{n_\lambda}$$

fordert in dem Fall, dass die Grössen n alle einander gleich sind:

$$\gamma_\varkappa^{(\lambda)} = \gamma_\lambda^{(\varkappa)} = \gamma_{\varkappa\lambda},$$

und man erhält, wenn $n_\varkappa$ gleich der ungeraden Primzahl q ist:

$$(1.)\qquad \varphi\{\gamma\}(q) = \sum_s e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=p}\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=p}\gamma_{\varkappa\lambda}s_\varkappa s_\lambda},$$

worin die Grössen s von einander unabhängig je ein vollständiges Restsystem nach dem Modul q zu durchlaufen haben.

Es sei zunächst vorausgesetzt, dass die Determinante

$$(2.)\qquad D = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \dots & \gamma_{pp} \end{vmatrix}$$

sich nicht durch q theilen lasse.

Wir beginnen mit der Bestimmung der Summe φ für den Fall $p=2$; in diesem Fall ist:

$$(3.)\qquad \varphi\begin{Bmatrix} \gamma_{11}, & \gamma_{12} \\ \gamma_{21}, & \gamma_{22} \end{Bmatrix}(q, q) = \sum_{s_1}\sum_{s_2} e^{\frac{2\pi i}{q}(\gamma_{11}s_1^2 + 2\gamma_{12}s_1s_2 + \gamma_{22}s_2^2)}.$$

Es seien zunächst die Coefficienten γ_{11}, γ_{22} nicht beide durch q theilbar, also etwa γ_{11} nicht durch q theilbar; ferner nach Voraussetzung:

$$D = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$$

nicht durch q theilbar.

Die Summe (3.) lässt sich folgendermassen schreiben:

$$(4.)\qquad \sum_{s_1}\sum_{s_2} e^{\frac{2\pi i}{q}\left[\frac{(\gamma_{11}s_1+\gamma_{12}s_2)^2}{\gamma_{11}} + \frac{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}{\gamma_{11}}s_2^2\right]}.$$

Nun durchläuft $\gamma_{11}s_2$ gleichzeitig mit s_2 ein vollständiges Restsystem nach dem Modul q. Es kann also in der Summe (4.) an Stelle von s_2 gesetzt werden $\gamma_{11}s_2$, und dadurch erhält die Summe (4.) folgende Form:

$$(5.)\qquad \sum_{s_1}\sum_{s_2} e^{\frac{2\pi i}{q}\{\gamma_{11}(s_1+\gamma_{12}s_2)^2 + \gamma_{11}(\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2)s_2^2\}}.$$

Summirt man zuerst nach s_1, und beachtet, dass, was auch s_2 sein mag, $s_1+\gamma_{12}s_2$ immer gleichzeitig mit s_1 ein vollständiges Restsystem durchläuft, so erhält man mit Benutzung der *Gauss*ischen Summe:

$$\sum_s e^{s\frac{2h\pi i}{q}} = \left(\frac{h}{q}\right) i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \sqrt{q}\,^{*})$$

aus (5.) die Summe:

$$\left(\frac{\gamma_{11}}{q}\right) i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \sqrt{q} \sum_{s_2} e^{\frac{2\pi i}{q}\gamma_{11}(\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2)s_2^2}$$

und durch abermalige Anwendung der *Gaussischen* Formel:

$$\left(\frac{\gamma_{11}}{q}\right)\left(\frac{\gamma_{11}(\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2)}{q}\right) i^{2\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} q.$$

Das Symbol $\left(\frac{h}{q}\right)$ hat darin den Werth $+1$ oder -1, je nachdem h quadratischer Rest oder Nichtrest von q ist.

Demnach ist, nach bekannten Sätzen über die quadratischen Reste:

$$\left(\frac{\gamma_{11}}{q}\right)\left(\frac{\gamma_{11}D}{q}\right) = \left(\frac{\gamma_{11}^2 D}{q}\right) = \left(\frac{D}{q}\right).$$

Also haben wir

$$(6.)\qquad \varphi\begin{Bmatrix}\gamma_{11}, & \gamma_{12}\\ \gamma_{21}, & \gamma_{22}\end{Bmatrix}(q,q) = \left(\frac{D}{q}\right) i^{2\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} q.$$

Sind γ_{11}, γ_{22} beide durch q theilbar, γ_{12} also nicht durch q theilbar, so reducirt sich die Summe φ auf folgende:

$$\varphi\begin{Bmatrix}\gamma_{11}, & \gamma_{12}\\ \gamma_{21}, & \gamma_{22}\end{Bmatrix}(q,q) = \sum_{s_1}\sum_{s_2} e^{\frac{2\pi i}{q}2\gamma_{12}s_1 s_2}.$$

Die nach s_1 genommene Summe hat immer den Werth Null, ausser wenn s_2 durch q theilbar ist, in welchem Fall sie den Werth q hat. Der Werth der ganzen Summe ist daher q. Dieser Specialfall ist aber gleichfalls in der Form (6.) enthalten, denn wenn γ_{11} und γ_{22} durch q theilbar sind, so ist:

$$\left(\frac{D}{q}\right) = \left(\frac{-\gamma_{12}^2}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} = i^{2\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}.$$

Daher ist für diesen Fall $\left(\frac{D}{q}\right) i^{2\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} = 1$, woraus folgt, dass die Formel (6.) allgemein gültig ist, falls D nicht durch q theilbar ist.

---

*) Vgl. *Dirichlet* Zahlentheorie p. 328.

Man schliesst daraus auf den allgemeinen Werth der Summe:

$$(7.)\qquad \varphi\begin{Bmatrix}\gamma_{11}, & \gamma_{12}, & \dots & \gamma_{1p}\\ \gamma_{21}, & \gamma_{22}, & \dots & \gamma_{2p}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \gamma_{p1}, & \gamma_{p2}, & \dots & \gamma_{pp}\end{Bmatrix}(q, q, \dots q) = \left(\frac{D}{q}\right) i^{p\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} q^{\frac{p}{2}},$$

wenn die Determinante D der Coefficienten γ durch q nicht theilbar ist.

Da die Formel (7.) für $p=1$ und $p=2$ bewiesen ist, so ist sie allgemein bewiesen, sobald sich zeigen lässt, dass sie gültig ist unter der Voraussetzung ihrer Gültigkeit für $p-1$ und $p-2$.

Um diesen Nachweis zu führen, müssen zwei Fälle unterschieden werden:

I. Es seien $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \dots \gamma_{pp}$ nicht alle durch q theilbar, etwa γ_{11} nicht durch q theilbar. Man hat dann die identische Gleichung:

$$\sum_1^p \sum_1^p \gamma_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda = \frac{(\gamma_{11}s_1+\gamma_{12}s_2+\dots+\gamma_{1p}s_p)^2}{\gamma_{11}} + \sum_2^p \sum_2^p \gamma'_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda,$$

worin:

$$\gamma'_{\varkappa\lambda} = \frac{\gamma_{11}\gamma_{\varkappa\lambda}-\gamma_{1\varkappa}\gamma_{1\lambda}}{\gamma_{11}}.$$

Da nun $s_2, s_3, \dots s_p$ gleichzeitig mit $\gamma_{11}s_2, \gamma_{11}s_3, \dots \gamma_{11}s_p$ je ein vollständiges Restsystem nach dem Modul q durchlaufen, so kann man die ersteren dieser Grössen durch die letzteren ersetzen, und man erhält:

$$(8.)\qquad \varphi\{\gamma\}(q) = \sum_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{2i\pi}{q}\left\{\gamma_{11}(s_1+\gamma_{12}s_2+\dots+\gamma_{1p}s_p)^2+\sum\limits_2^p\sum\limits_2^p \gamma''_{\varkappa\lambda}s_\varkappa s_\lambda\right.},$$

worin:

$$\gamma''_{\varkappa\lambda} = \gamma_{11}(\gamma_{11}\gamma_{\varkappa\lambda}-\gamma_{1\varkappa}\gamma_{1\lambda}).$$

Summirt man nun in Bezug auf s_1, indem man beachtet, dass

$$s_1+\gamma_{12}s_2+\dots+\gamma_{1p}s_p$$

für jedes Werthsystem von $s_2, s_3, \dots s_p$ gleichzeitig mit s_1 ein vollständiges Restsystem nach dem Modul q durchläuft, so erhält man:

$$(9.)\qquad \varphi\{\gamma\}(q) = \left(\frac{\gamma_{11}}{q}\right) i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}\sqrt{q}\sum_{s_2, s_3, \dots s_p} e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_2^p\sum\limits_2^p \gamma''_{\varkappa\lambda}s_\varkappa s_\lambda}.$$

Nun ist aber, wie aus bekannten Determinantensätzen leicht folgt, die Determinante der Coefficienten $\gamma''_{\varkappa\lambda}$:

$$D'' = \gamma_{11}^{2p-3}D,$$

also auch D'' nicht durch q theilbar; und nach der Formel (7.), die für $p-1$ als richtig vorausgesetzt ist:

$$\sum_{s_2,\dots s_p} e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_2^p\sum\limits_2^p \gamma''_{\varkappa\lambda}s_\varkappa s_\lambda} = \left(\frac{\gamma_{11}^{2p-3}D}{q}\right) i^{(p-1)\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} q^{\frac{p-1}{2}}.$$

Setzt man diesen Werth in (9.) ein, und beachtet die Gleichung:

$$\left(\frac{\gamma_{11}^{2p-3}D}{q}\right)\left(\frac{\gamma_{11}}{q}\right) = \left(\frac{\gamma_{11}^{2p-2}D}{q}\right) = \left(\frac{D}{q}\right),$$

so folgt aus (9.) unmittelbar die zu beweisende Formel (7.).

II. Es seien $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \dots \gamma_{pp}$ alle durch q theilbar, die Determinante D dagegen immer noch durch q untheilbar. Es können dann nicht alle Grössen $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \dots \gamma_{1p}$ durch q theilbar sein; also sei etwa γ_{12} durch q untheilbar.

Man hat dann die identische Gleichung:

$$\Sigma\Sigma\gamma_{\varkappa\lambda}s_\varkappa s_\lambda$$

$$= \gamma_{11}s_1^2+\gamma_{22}s_2^2+\frac{2(\gamma_{12}s_2+\gamma_{13}s_3+\dots+\gamma_{1p}s_p)(\gamma_{21}s_1+\gamma_{23}s_3+\dots+\gamma_{2p}s_p)}{\gamma_{12}}+\sum_3^p\sum_3^p\gamma'_{\varkappa\lambda}s_\varkappa s_\lambda,$$

worin:

$$\gamma'_{\varkappa\lambda} = \frac{\gamma_{\varkappa\lambda}\gamma_{12}-\gamma_{1\varkappa}\gamma_{2\lambda}-\gamma_{2\varkappa}\gamma_{1\lambda}}{\gamma_{12}}.$$

Da nun, nach Voraussetzung, γ_{11} und γ_{22} durch q theilbar sind, γ_{12} dagegen nicht durch q theilbar ist, man also $s_3, s_4, \dots s_p$ im Exponenten ersetzen kann durch $\gamma_{12}s_3, \gamma_{12}s_4, \dots \gamma_{12}s_p$, so ergiebt sich:

$$\varphi\{\gamma\}(q) = \sum_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{2\pi i}{q}\{\gamma_{12}(s_2+\gamma_{13}s_3+\dots+\gamma_{1p}s_p)(s_1+\gamma_{23}s_3+\dots+\gamma_{2p}s_p)+\sum\limits_3^p\sum\limits_3^p\gamma''_{\varkappa\lambda}s_\varkappa s_\lambda\}},$$

worin:

$$\gamma''_{\varkappa\lambda} = \gamma_{12}(\gamma_{\varkappa\lambda}\gamma_{12}-\gamma_{1\varkappa}\gamma_{2\lambda}-\gamma_{2\varkappa}\gamma_{1\lambda}).$$

Die Summation nach s_1 und s_2 lässt sich hier unmittelbar ausführen und ergiebt das Resultat:

$$\varphi\{\gamma\}(q) = q\sum_{s_3,\dots s_p} e^{\frac{2\pi i}{q}\sum\limits_3^p\sum\limits_3^p\gamma''_{\varkappa\lambda}s_\varkappa s_\lambda}.$$

Bildet man nun die Determinante D'' der Coefficienten $\gamma''_{\varkappa\lambda}$, so folgt wie oben:

$$D'' \equiv -\gamma_{12}^{2p-6}D \qquad (\text{mod. } q);$$

also ist auch D'' nicht durch q theilbar, wenn es D nicht ist, und die Formel (7.) giebt, für $p-2$ als richtig vorausgesetzt:

$$\varphi\{\gamma\}(q) = \left(\frac{-\gamma_{12}^{2p-6}D}{q}\right) i^{(p-2)\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} q^{\frac{p}{2}};$$

nun ist aber:

$$\left(\frac{-\gamma_{12}^{2p-6}}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right) = i^{2\left(\frac{q-1}{2}\right)^2},$$

so dass auch für diesen Fall die Richtigkeit der Formel (7.) folgt.

§. 4.

Bestimmung von $\varphi\{\gamma\}(q)$, wenn D durch q theilbar ist.

Ist die Determinante D durch q theilbar, so kann die Formel (7.) nicht mehr gültig sein. Um auch für diesen Fall zur Bestimmung unserer Summe zu gelangen, gehen wir wieder von dem Falle $p = 2$ aus. Es ist also zu bestimmen:

$$(1.)\quad \varphi\begin{Bmatrix}\gamma_{11}, & \gamma_{12}\\ \gamma_{21}, & \gamma_{22}\end{Bmatrix}(q, q) = \sum_{s_1}\sum_{s_2} e^{\frac{2\pi i}{q}(\gamma_{11}s_1^2+2\gamma_{12}s_1s_2+\gamma_{22}s_2^2)},$$

und es ist vorausgesetzt, dass

$$D = \gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2$$

durch q theilbar (etwa auch gleich Null) ist. Um zunächst den einfachsten Fall zu erledigen, seien γ_{11}, γ_{22} beide durch q theilbar, folglich auch γ_{12}. In diesem Falle hat jedes Glied der Summe den Werth 1 und demnach die ganze Summe den Werth

$$(2.)\quad \varphi\{\gamma\}(q) = q^2.$$

Ist einer der Coefficienten γ_{11}, γ_{22}, etwa γ_{11} nicht durch q theilbar, so erhält man:

$$\varphi\{\gamma\}(q) = \sum_{s_1}\sum_{s_2} e^{\frac{2\pi i}{q}\left\{\frac{(\gamma_{11}s_1+\gamma_{12}s_2)^2}{\gamma_{11}}+\frac{(\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2)s_2^2}{\gamma_{11}}\right\}},$$

und wenn man, was hier freisteht, s_2 durch $\gamma_{11}s_2$ ersetzt, und im Exponenten ganze Vielfache von $2\pi i$ unterdrückt, so folgt:

$$\varphi\{\gamma\}(q) = \sum_{s_1}\sum_{s_2} e^{\frac{2\pi i}{q}\gamma_{11}(s_1+\gamma_{12}s_2)^2}.$$

Die Anwendung der *Gauss*ischen Formel auf diese Summe liefert unmittelbar das Resultat:

$$(3.)\quad \varphi\{\gamma\}(q) = \left(\frac{\gamma_{11}}{q}\right) i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} q^{\frac{3}{2}}.$$

Wir leiten hieraus durch Induction die allgemeine Formel ab und beweisen dieselbe dann durch den Schluss von $p-1$ auf p.

Man bilde die Determinanten der im folgenden Schema durch die Quadrate abgetheilten Grössen

$$(4.)\quad \begin{array}{|ccccc|} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \dots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \dots & \gamma_{2p} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \dots & \gamma_{3p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \gamma_{p3} & \dots & \gamma_{pp} \end{array}$$

und bezeichne dieselben der Reihe nach mit

$$D_1,\quad D_2,\quad D_3,\quad \dots\quad D_p,$$

so dass:

$$D_1 = \gamma_{11},\quad D_2 = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2,\quad \dots\quad D_p = D.$$

Indem man die Indices 1, 2, ... p auf alle möglichen Weisen anordnet, kann man diese Reihe von Determinanten auf $1.2.3\dots.p$ verschiedene Arten bilden.

Der Voraussetzung nach ist D_p durch q theilbar. Wenn nun bei allen möglichen Anordnungen der Indices auch sämmtliche Determinanten D_{p-1}, D_{p-2}, ... D_2, D_1 durch q theilbar sind, so müssen nothwendig sämmliche γ durch q theilbar sein, denn es wird dies schon eintreten, wenn bei allen Anordnungen D_1 und D_2 durch q theilbar sind. Dann aber hat jedes Glied der Summe den Werth 1, und der Werth der ganzen Summe reducirt sich auf q^p. Sind also nicht alle γ durch q theilbar, so werden bei irgend einer Anordnung D_p, D_{p-1}, ... D_{k+1} durch q theilbar, D_k durch q nicht theilbar sein. Nehmen wir an, es sei die Anordnung der Indices so gewählt, dass bei keiner andern Anordnung k einen grösseren Werth erhalte, d. h. es sei nicht möglich, aus der Determinante D durch Ausstreichen von Horizontal- und Vertikalreihen, die sich in der Diagonale schneiden, eine Determinante von mehr als k^2 Elementen zu bilden, die durch q nicht theilbar ist. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir für unsere Summe folgende Formel:

$$(5.)\quad \varphi\left\{\begin{matrix} \gamma_{11}, & \gamma_{12}, & \dots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21}, & \gamma_{22}, & \dots & \gamma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{p1}, & \gamma_{p2}, & \dots & \gamma_{pp} \end{matrix}\right\}(q, q, \dots q) = \left(\frac{D_k}{q}\right) i^{k\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} q^{\frac{2p-k}{2}}.$$

In den beiden besonderen Fällen, wo $p=2$ oder $k=p$ ist, haben wir die Richtigkeit dieser Formel schon nachgewiesen.

Auch für $k=0$ bleibt diese Formel noch richtig, wenn wir unter D_0 die Einheit verstehen.

Um durch den Schluss von $p-1$ auf p die Richtigkeit dieser Formel darzuthun, schicke ich folgende Bemerkung voraus. Zur Bildung der Determinante D_k war eine gewisse Anordnung der Indices erforderlich. Hat man aber die Indices $k+1, k+2, \dots p$, dieser Forderung gemäss festgesetzt, so ist die Anordnung der Indices $1, 2, \dots k$ auf D_k ohne Einfluss und kann daher noch beliebig gewählt werden. Auch die Indices $k+1, k+2, \dots p$ können unter sich beliebig vertauscht werden. Nur die Abtheilung der Indices in zwei Gruppen ist im Allgemeinen eine gegebene, wenn auch unter Umständen auf mehrfache Art.

Um unsern Beweis zu führen, müssen nun wieder zwei Fälle unterschieden werden:

I. Es seien nicht alle $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \dots \gamma_{kk}$ durch q theilbar, etwa γ_{11} nicht theilbar.

Man setzt genau wie oben:

$$\sum_1^p \sum_1^p \gamma_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda = \frac{(\gamma_{11}s_1+\gamma_{12}s_2+\cdots+\gamma_{1p}s_p)^2}{\gamma_{11}} + \sum_2^p \sum_2^p \gamma'_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda,$$

worin wieder:

$$\gamma'_{\varkappa\lambda} = \frac{\gamma_{11}\gamma_{\varkappa\lambda}-\gamma_{1\varkappa}\gamma_{1\lambda}}{\gamma_{11}}.$$

Setzt man, was freisteht: $\gamma_{11}s_2, \gamma_{11}s_3, \dots \gamma_{11}s_p$ an die Stelle von $s_2, s_3, \dots s_p$, so geht die Summe über in folgende:

$$\varphi\{\gamma\}(q) = \sum_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{2\pi i}{q}\left\{\gamma_{11}(s_1+\gamma_{12}s_2+\cdots+\gamma_{1p}s_p)^2 + \sum_2^p \sum_2^p \gamma''_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda\right\}},$$

worin

$$\gamma''_{\varkappa\lambda} = \gamma_{11}(\gamma_{11}\gamma_{\varkappa\lambda}-\gamma_{1\varkappa}\gamma_{1\lambda});$$

und indem man die Summation nach s_1 ausführt:

$$(6.)\qquad \varphi\{\gamma\}(q) = \left(\frac{\gamma_{11}}{q}\right) i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \sqrt{q} \sum_{s_2, \dots s_p} e^{\frac{2\pi i}{q}\sum_2^p \sum_2^p \gamma''_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda}.$$

Man bilde nun nach dem Schema (4.) die Determinanten

$$D''_1,\quad D''_2,\quad \dots\quad D''_{p-1}$$

aus den Grössen $\gamma''_{\varkappa\lambda}$, so dass $D''_1 = \gamma''_{22}$ wird.

Die Anwendung einfacher Determinantensätze liefert dann ganz wie in §. 3 die Relationen:

$$(7.)\quad \begin{cases} D''_{p-1} = \gamma_{11}^{2p-3} D_p, \\ D''_{p-2} = \gamma_{11}^{2p-5} D_{p-1}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ D''_k = \gamma_{11}^{2k-1} D_{k+1}, \\ D''_{k-1} = \gamma_{11}^{2k-3} D_k, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ D''_1 = \gamma_{11} D_2. \end{cases}$$

Diese Relationen zeigen, dass die Determinanten D_i und D''_{i-1} gleichzeitig durch q theilbar oder untheilbar sind. Eine Aenderung in der Anordnung der Indices, durch welche das erste durch q untheilbare D''_{k-1} in der Reihe (7.) weiter hinauf gerückt würde, müsste auch das entsprechende D_k weiter hinaufrücken, was der Voraussetzung nach nicht möglich ist. Wir können daher die auf der rechten Seite von (6.) vorkommende Summe bilden nach der für den Fall $p-1$ als richtig vorausgesetzten Formel (5.) und erhalten:

$$\varphi\{\gamma\}(q) = \left(\frac{\gamma_{11}}{q}\right)\left(\frac{D''_{k-1}}{q}\right) i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} i^{(k-1)\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \sqrt{q}\, q^{\frac{2p-k-1}{2}}.$$

Nun ist aber:

$$\left(\frac{\gamma_{11}}{q}\right)\left(\frac{D''_{k-1}}{q}\right) = \left(\frac{\gamma_{11}^{2k-2}}{q}\right)\left(\frac{D_k}{q}\right) = \left(\frac{D_k}{q}\right),$$

woraus sich die Richtigkeit der Formel (5.) ergiebt, auch für den Fall, dass k den Werth 1 hat.

II. Ganz ähnlich ist der Beweis für den zweiten Fall, wo sämmtliche Grössen $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \ldots \gamma_{kk}$ durch q theilbar sind. Es können dann, da D_k durch q untheilbar sein soll, nicht alle $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \ldots \gamma_{1k}$ durch q theilbar sein, und wir können annehmen, es sei γ_{12} nicht durch q theilbar.

Dieselbe Transformation wie im zweiten Fall von §. 3 führt zu folgendem Ausdruck der Summe:

$$\varphi\{\gamma\}(q) = \sum_{s_1, s_2, \ldots s_p} e^{\frac{2\pi i}{q}\gamma_{12}(s_2+\gamma_{13}s_3+\cdots+\gamma_{1p}s_p)(s_1+\gamma_{23}s_3+\cdots+\gamma_{2p}s_p)+\sum\limits_3^p\sum\limits_3^p \gamma''_{\varkappa\lambda}s_\varkappa s_\lambda},$$

worin:

$$\gamma''_{\varkappa\lambda} = \gamma_{12}(\gamma_{\varkappa\lambda}\gamma_{12} - \gamma_{1\varkappa}\gamma_{2\lambda} - \gamma_{1\lambda}\gamma_{2\varkappa}).$$

Die Summation nach s_1 und s_2 liefert die Gleichung:

$$\varphi\{\gamma\}(q) = q \sum_{s_3, \dots s_p} e^{\frac{2\pi i}{q} \sum\limits_3^p \sum\limits_3^p \gamma''_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda}.$$

Bildet man wieder nach dem Schema (4.) die Determinanten:

$$D''_1, \quad D''_2, \quad \dots \quad D''_{p-2}$$

aus den Grössen $\gamma''_{\varkappa\lambda}$, so folgen leicht die Congruenzen:

$$(8.) \quad \begin{cases} D''_{p-2} \equiv -\gamma_{12}^{2p-6} D_p, \\ D''_{p-3} \equiv -\gamma_{12}^{2p-8} D_{p-1}, \\ \dots\dots\dots \\ D''_{k-1} \equiv -\gamma_{12}^{2k-4} D_{k+1}, \\ D''_{k-2} \equiv -\gamma_{12}^{2k-6} D_k, \\ \dots\dots\dots \\ D''_1 \equiv -D_3, \end{cases} \qquad (\text{mod. } q),$$

welche zeigen, dass D''_{i-2} mit D_i gleichzeitig durch q theilbar oder untheilbar ist.

Wenn wir also die Formel (5.) für $p-2$ als richtig voraussetzen, so folgt:

$$\varphi\{\gamma\}(q) = q\left(\frac{D''_{k-2}}{q}\right) i^{(k-2)\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} q^{\frac{2p-k-2}{2}}.$$

Nun ist aber:

$$\left(\frac{D''_{k-2}}{q}\right) = \left(\frac{-\gamma_{12}^{2k-6} D_k}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{D_k}{q}\right)$$

und

$$\left(\frac{-1}{q}\right) = i^{2\left(\frac{q-1}{2}\right)^2},$$

woraus auch in diesem Falle die Richtigkeit der Formel (5.) folgt.

Die hier gemachte Voraussetzung über die Theilbarkeit der Coefficienten γ schliesst die Möglichkeit $k=1$ aus, für $k=2$ wird $2k-6$ negativ, so dass die obige Schlussweise nicht direct anwendbar ist. Man erhält aber, da in diesem Fall sämmtliche $\gamma''_{\varkappa\lambda}$ durch q theilbar sein müssen, $\varphi\{\gamma\}(q) = q^{p-1}$, was auch in unserer allgemeinen Formel (5.) enthalten ist, da jetzt

$$\left(\frac{D_2}{q}\right) = \left(\frac{-\gamma_{12}^2}{q}\right) = i^{2\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}$$

ist.

§. 5.

Bestimmung von $\varphi\{\gamma\}(n_1, n_2, \dots n_p)$, wenn $n_1, n_2, \dots n_p$ verschiedene Potenzen von einer und derselben ungeraden Primzahl sind.

Bedeutet q irgend eine ungerade Primzahl, $r_1, r_2, \dots r_p$ Zahlen, die entweder gleich 1 oder gleich q sind, $k_1, k_2, \dots k_p$ irgend welche positive ganze Zahlen, so muss jetzt:

$$(1.)\qquad \varphi\begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}, & \dots & \gamma_1^{(p)} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}, & \dots & \gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(1)}, & \gamma_p^{(2)}, & \dots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(q^{2k_1}r_1, q^{2k_2}r_2, \dots q^{2k_p}r_p)$$

bestimmt werden, zunächst unter der Voraussetzung, dass die Determinante D der Grössen γ durch q nicht theilbar sei. Zu dieser Bestimmung führt ein Verfahren, welches dem von *Gauss* (l. c.) angewandten ganz analog ist.

Nach der allgemeinen Voraussetzung über die Coefficienten γ haben wir die Relation:

$$(2.)\qquad \frac{\gamma_i^{(h)}}{q^{2k_i}r_i} = \frac{\gamma_h^{(i)}}{q^{2k_h}r_h} = c_{ih}.$$

Setzen wir also:

$$(3.)\qquad f(s_1, s_2, \dots s_p) = \sum_i \sum_h c_{ih} s_i s_h,$$

so wird unsere Summe (1.):

$$(4.)\qquad \sum_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{2\pi i f(s_1, s_2, \dots s_p)},$$

worin die Summationsbuchstaben $s_1, s_2, \dots s_p$ vollständige Restsysteme zu durchlaufen haben resp. nach den Moduln: $q^{2k_1}r_1, q^{2k_2}r_2, \dots q^{2k_p}r_p$. Aus (2.) folgen die Relationen, indem man beiderseits mit $q^{k_i+k_h}$ multiplicirt:

$$(5.)\qquad \frac{\gamma_i^{(h)}}{q^{k_i-k_h}r_i} = \frac{\gamma_h^{(i)}}{q^{k_h-k_i}r_h} = \frac{c_i^{(h)}}{r_i} = \frac{c_h^{(i)}}{r_h},$$

worin:

$$(6.)\qquad c_i^{(h)} = \frac{\gamma_i^{(h)}}{q^{k_i-k_h}}, \quad c_h^{(i)} = \frac{\gamma_h^{(i)}}{q^{k_h-k_i}}.$$

Es lässt sich daraus leicht schliessen, dass $c_i^{(h)}$ und $c_h^{(i)}$ ganze Zahlen sind. Ist nämlich zunächst $k_i = k_h$, so ist $c_i^{(h)} = \gamma_i^{(h)}$, $c_h^{(i)} = \gamma_h^{(i)}$, also beide ganze Zahlen. Ist dagegen $k_i > k_h$, so ist $c_h^{(i)}$ eine durch q theilbare ganze Zahl, nämlich: $c_h^{(i)} = \gamma_h^{(i)} q^{k_i-k_h}$, also: $c_i^{(h)} = \frac{r_i}{r_h} c_h^{(i)}$ ebenfalls eine ganze Zahl, da $r_h = 1$ oder $= q$

ist, also jedenfalls in $c_h^{(i)}$ aufgeht. Es mögen nun $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ beliebige ganze Zahlen bedeuten, und man bilde nach dem Vorgang von *Gauss* die Summe:

$$(7.)\qquad \sum_{\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_p} e^{2\pi i f(\lambda_1+\varrho_1 r_1 q^{k_1}, \lambda_2+\varrho_2 r_2 q^{k_2}, \dots \lambda_p+\varrho_p r_p q^{k_p})},$$

indem man

ϱ_1 ein vollständiges Restsystem (mod. q^{k_1}),
ϱ_2 - - - (mod. q^{k_2}),
. . . .
ϱ_p - - - (mod. q^{k_p})

durchlaufen lässt.

Die Function f, die hier im Exponenten steht, nimmt entwickelt folgende Form an:

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p)+(\varrho_1 r_1 q^{k_1} f'(\lambda_1)+\varrho_2 r_2 q^{k_2} f'(\lambda_2)+\dots+\varrho_p r_p q^{k_p} f'(\lambda_p))$$
$$+f(\varrho_1 r_1 q^{k_1}, \varrho_2 r_2 q^{k_2}, \dots \varrho_p r_p q^{k_p}).$$

Beachtet man nun, dass:

$$c_{ih} r_i r_h q^{k_i+k_h} = c_i^{(h)} r_h = c_h^{(i)} r_i$$

eine ganze Zahl ist, so folgt, dass auch:

$$f(\varrho_1 r_1 q^{k_1}, \varrho_2 r_2 q^{k_2}, \dots \varrho_p r_p q^{k_p})$$

eine ganze Zahl ist, dass also dieser Theil im Exponenten der Summe (7.) unterdrückt werden kann. Der erste Theil $f(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p)$ ist von den Summationsbuchstaben unabhängig, so dass man die Summe (7.) folgendermassen schreiben kann:

$$(8.)\qquad e^{2\pi i f(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p)} \sum_{\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_p} e^{2\pi i \{\varrho_1 r_1 q^{k_1} f'(\lambda_1)+\varrho_2 r_2 q^{k_2} f'(\lambda_2)+\dots+\varrho_p r_p q^{k_p} f'(\lambda_p)\}}.$$

Nun ist aber

$$(9.)\qquad \begin{cases} r_1 q^{k_1} f'(\lambda_1) = \dfrac{2(\gamma_1^{(1)}\lambda_1+\gamma_1^{(2)}\lambda_2+\dots+\gamma_1^{(p)}\lambda_p)}{q^{k_1}}, \\ r_2 q^{k_2} f'(\lambda_2) = \dfrac{2(\gamma_2^{(1)}\lambda_1+\gamma_2^{(2)}\lambda_2+\dots+\gamma_2^{(p)}\lambda_p)}{q^{k_2}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ r_p q^{k_p} f'(\lambda_p) = \dfrac{2(\gamma_p^{(1)}\lambda_1+\gamma_p^{(2)}\lambda_2+\dots+\gamma_p^{(p)}\lambda_p)}{q^{k_p}}, \end{cases}$$

und demnach hat die Summe (8.), die sich in das Product von p einfachen geometrischen Reihen auflösen lässt, immer dann den Werth Null, wenn nicht gleich-

zeitig

$$(10.)\quad \begin{cases} 2(\gamma_1^{(1)}\lambda_1+\gamma_1^{(2)}\lambda_2+\cdots+\gamma_1^{(p)}\lambda_p) = h_1 q^{k_1}, \\ 2(\gamma_2^{(1)}\lambda_1+\gamma_2^{(2)}\lambda_2+\cdots+\gamma_2^{(p)}\lambda_p) = h_2 q^{k_2}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 2(\gamma_p^{(1)}\lambda_1+\gamma_p^{(2)}\lambda_2+\cdots+\gamma_p^{(p)}\lambda_p) = h_p q^{k_p}, \end{cases}$$

worin h_1, h_2, ... h_p ganze Zahlen sind. In diesem einen Fall hat die Summe (8.) den Werth:

$$(11.)\quad e^{2\pi i f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p)}q^{k_1+k_2+\cdots+k_p}.$$

Es lässt sich aber nachweisen, dass unter der Voraussetzung der Untheilbarkeit der Determinante D durch die ungerade Primzahl q die Bedingung (10.) nur dann erfüllt sein kann, wenn gleichzeitig λ_1 durch q^{k_1}, λ_2 durch q^{k_2}, ... λ_p durch q^{k_p} theilbar sind.

Mit Rücksicht auf die Relationen (6.) lässt sich nämlich das System (10.) folgendermassen schreiben:

$$(12.)\quad \begin{cases} 2\{c_1^{(1)}q^{-k_1}\lambda_1+c_1^{(2)}q^{-k_2}\lambda_2+\cdots+c_1^{(p)}q^{-k_p}\lambda_p\} = h_1, \\ 2\{c_2^{(1)}q^{-k_1}\lambda_1+c_2^{(2)}q^{-k_2}\lambda_2+\cdots+c_2^{(p)}q^{-k_p}\lambda_p\} = h_2, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 2\{c_p^{(1)}q^{-k_1}\lambda_1+c_p^{(2)}q^{-k_2}\lambda_2+\cdots+c_p^{(p)}q^{-k_p}\lambda_p\} = h_p. \end{cases}$$

Die Grössen h_1, h_2, ... h_p sind also in der That ganze Zahlen, wenn λ_1 durch q^{k_1}, λ_2 durch q^{k_2}, ... λ_p durch q^{k_p} theilbar sind. Um aber zu zeigen, dass dies auch die nothwendige Bedingung ist, löse man das System (12.) nach den Grössen $q^{-k_1}\lambda_1$, $q^{-k_2}\lambda_2$, ... $q^{-k_p}\lambda_p$ auf. Die Auflösungen haben als gemeinschaftlichen Nenner die doppelte Determinante der Grössen $c_i^{(h)}$. Diese Determinante ist aber, wie aus (6.) hervorgeht, der Determinante D der Grössen $\gamma_i^{(h)}$ gleich, also durch q nicht theilbar. Da nun aber die Grössen $q^{-k_1}\lambda_1, q^{-k_2}\lambda_2, \ldots$ $q^{-k_p}\lambda_p$ keine anderen Nenner als Potenzen von q haben können, so müssen dieselben ganze Zahlen sein.

Fassen wir also das hiermit Bewiesene kurz zusammen, so folgt, dass die Summe (8.) nur dann einen von Null verschiedenen Werth hat, wenn:

$$(13.)\quad \lambda_1 = q^{k_1}\lambda_1', \quad \lambda_2 = q^{k_2}\lambda_2', \quad \ldots \quad \lambda_p = q^{k_p}\lambda_p',$$

worin λ_1', λ_2', ... λ_p' wieder ganze Zahlen sind, und dass die Summe in diesem Fall den Werth (11.) hat.

Wenn nun ϱ_i ein vollständiges Restsystem nach dem Modul q^{k_i}, λ_i ein vollständiges Restsystem nach dem Modul $r_i q^{k_i}$ durchläuft, so durchläuft

$$s_i = \lambda_i + \varrho_i r_i q^{k_i}$$

ein vollständiges Restsystem nach dem Modul $r_i q^{2k_i}$; denn zunächst nimmt s_i gerade $r_i q^{2k_i}$ Werthe an, von diesen können aber keine zwei congruent sein nach dem Modul $r_i q^{2k_i}$. Denn ist

$$\lambda_i + \varrho_i r_i q^{k_i} \equiv \lambda_i' + \varrho_i' r_i q^{k_i} \qquad (\text{mod. } r_i q^{2k_i}),$$

so folgt:

$$\lambda_i \equiv \lambda_i' \qquad (\text{mod. } r_i q^{k_i}),$$

folglich

$$\lambda_i = \lambda_i',$$

daraus weiter

$$\varrho_i \equiv \varrho_i' \qquad (\text{mod. } q^{k_i}),$$

also auch

$$\varrho_i = \varrho_i'.$$

Wir erhalten demnach für die gesuchte Summe (1.) folgenden Ausdruck:

$$(14.) \quad \begin{cases} \varphi\{\gamma\}(n_1, n_2, \dots n_p) \\ = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p} \sum_{\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_p} e^{2\pi i f(\lambda_1 + \varrho_1 r_1 q^{k_1}, \lambda_2 + \varrho_2 r_2 q^{k_2}, \dots \lambda_p + \varrho_p r_p q^{k_p})}. \end{cases}$$

Nach dem soeben bewiesenen Satze fallen aber in der auf $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ bezüglichen Summe alle die Glieder heraus, in denen nicht λ_i von der Form $q^{k_i}\lambda_i'$ ist. Setzt man also:

$$\lambda_i = q^{k_i}\lambda_i' + \lambda_i'',$$

so muss, damit man alle Werthe von λ_i erhalte,

λ_i' ein vollständiges Restsystem (mod. r_i),
λ_i'' - - - (mod. q^{k_i})

durchlaufen. In der Summe (14.) haben dann aber nur die Glieder einen von Null verschiedenen Werth, in denen $\lambda_i'' \equiv 0$ (mod. q^{k_i}) ist. Diese Glieder haben den Werth (11.). Demnach reducirt sich (14.) auf folgende Summe:

$$(15.) \quad \varphi\{\gamma\}(n_1, n_2, \dots n_p) = q^{k_1 + k_2 + \dots + k_p} \sum_{\lambda_1', \lambda_2', \dots \lambda_p'} e^{2\pi i f(q^{k_1}\lambda_1', q^{k_2}\lambda_2', \dots q^{k_p}\lambda_p')},$$

worin $\lambda_1', \lambda_2', \dots \lambda_p'$ vollständige Restsysteme durchlaufen, resp. nach den Moduln $r_1, r_2, \dots r_p$.

Nun ist aber:

$$f(q^{k_1}\lambda_1', q^{k_2}\lambda_2', \dots q^{k_p}\lambda_p') = \sum_i \sum_h c_{ih} q^{k_i + k_h} \lambda_i' \lambda_h' = \sum_i \sum_h \frac{c_i^{(h)}}{r_i} \lambda_i' \lambda_h'.$$

Und demnach lässt sich nach der Definition der Function φ die Gleichung (15.) folgendermassen schreiben:

$$(16.)\quad \begin{cases} \varphi \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}, & \dots & \gamma_1^{(p)} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}, & \dots & \gamma_2^{(p)} \\ . & . & . & . \\ \gamma_p^{(1)}, & \gamma_p^{(2)}, & \dots & \gamma_p^{(p)} \end{pmatrix} (q^{2k_1}r_1, q^{2k_2}r_2, \dots q^{2k_p}r_p) \\ = q^{k_1+k_2+\dots+k_p} \varphi \begin{pmatrix} c_1^{(1)}, & c_1^{(2)}, & \dots & c_1^{(p)} \\ c_2^{(1)}, & c_2^{(2)}, & \dots & c_2^{(p)} \\ . & . & . & . \\ c_p^{(1)}, & c_p^{(2)}, & \dots & c_p^{(p)} \end{pmatrix} (r_1, r_2, \dots r_p). \end{cases}$$

Die Grössen $r_1, r_2, \dots r_p$ sind nun aber zum Theil gleich 1, zum Theil gleich q. Nehmen wir an, um die Formel in expliciter Form zu erhalten, es sei:

$$r_1 = r_2 = \dots = r_\nu = q, \quad r_{\nu+1} = r_{\nu+2} = \dots = r_p = 1,$$

so lässt sich, wie aus der Bedeutung von φ sofort hervorgeht, für (16.) endlich schreiben:

$$(17.)\quad \begin{cases} \varphi \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}, & \dots & \gamma_1^{(p)} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}, & \dots & \gamma_2^{(p)} \\ . & . & . & . \\ \gamma_p^{(1)}, & \gamma_p^{(2)}, & \dots & \gamma_p^{(p)} \end{pmatrix} (q^{2k_1+1}, q^{2k_2+1}, \dots q^{2k_\nu+1}, q^{2k_{\nu+1}}, \dots q^{2k_p}) \\ = q^{k_1+k_2+\dots+k_p} \varphi \begin{pmatrix} c_1^{(1)}, & c_1^{(2)}, & \dots & c_1^{(\nu)} \\ c_2^{(1)}, & c_2^{(2)}, & \dots & c_2^{(\nu)} \\ . & . & . & . \\ c_\nu^{(1)}, & c_\nu^{(2)}, & \dots & c_\nu^{(\nu)} \end{pmatrix} (q, q, \dots q). \end{cases}$$

Mit Anwendung der Relationen (5.) folgt leicht die Congruenz

$$(18.)\quad \Sigma \pm c_1^{(1)} c_2^{(2)} \dots c_p^{(p)} \equiv \Sigma \pm c_1^{(1)} c_2^{(2)} \dots c_\nu^{(\nu)} . \Sigma \pm c_{\nu+1}^{(\nu+1)} \dots c_p^{(p)} \pmod{q},$$

woraus sich ergiebt, dass die Determinante

$$\Sigma \pm c_1^{(1)} c_2^{(2)} \dots c_\nu^{(\nu)}$$

nicht durch q theilbar sein kann, wenn es, wie vorausgesetzt, die Determinante D nicht ist. Demnach ist die auf der linken Seite von (17.) vorkommende φ-Function nach §. 3 zu bestimmen.

§. 6.

Bestimmung von $\varphi\{\gamma\}(n, n, \dots n)$, wenn n eine ungerade Zahl und D relativ prim zu n ist.

Wir wenden nun die gewonnenen Resultate an auf den Fall, wo in der Function

$$\varphi\{\gamma\}(n_1, n_2, \dots n_p)$$

die Grössen $n_1, n_2, \dots n_p$ alle einander gleich und gleich der ungeraden Zahl n sind, während die Determinante D der Grössen γ mit n keinen gemeinschaftlichen Factor hat. Dieser Fall führt zu einer sehr eleganten Schlussformel. Nach unsern allgemeinen Voraussetzungen muss hier:

$$\gamma_\varkappa^{(\lambda)} = \gamma_\lambda^{(\varkappa)} = \gamma_{\varkappa\lambda}$$

sein. Setzen wir ferner

$$n = \mu . \nu . \pi \dots,$$

worin $\mu, \nu, \pi, \dots$ Potenzen von ungeraden, von einander verschiedenen, Primzahlen sind, so wird nach dem Satze des §. 2:

$$(1.) \qquad \varphi\{\gamma\}(n) = \varphi\left\{\frac{n}{\mu}\gamma\right\}(\mu) . \varphi\left\{\frac{n}{\nu}\gamma\right\}(\nu) . \varphi\left\{\frac{n}{\pi}\gamma\right\}(\pi) \dots .$$

Die Determinanten der auf der rechten Seite stehenden φ-Functionen sind:

$$\frac{n^p}{\mu^p}D, \quad \frac{n^p}{\nu^p}D, \quad \frac{n^p}{\pi^p}D, \quad \dots,$$

also resp. zu $\mu, \nu, \pi, \dots$ relativ prim.

Die Anwendung von *Jacobis* Erweiterung des *Legendre*schen Symbols gestattet eine einfache Ausdrucksweise der in (1.) vorkommenden φ-Functionen.

Die Formel (16.) des vorigen Paragraphen, in welcher nun die Grössen $k_1, k_2, \dots k_p$ und ebenso $r_1, r_2, \dots r_p$ alle gleich zu setzen sind, nämlich:

$$q^{2k_1}r_1 = q^{2k_2}r_2 = \dots = q^{2k_p}r_p = \mu,$$

ergiebt zunächst das Resultat:

$$(2.) \qquad \varphi\left\{\frac{n}{\mu}\gamma\right\}(\mu) = \left(\frac{\frac{n^p}{\mu^p}D}{\mu}\right) i^{p\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2} \mu^{\frac{p}{2}},$$

wenn man nämlich berücksichtigt, dass

$$\frac{q^{2k}r-1}{2} \equiv \frac{r-1}{2} \qquad (\text{mod. } 4),$$

und dass $\left(\frac{h}{\mu}\right)$ immer den Werth $+1$ hat, wenn μ eine gerade Potenz einer ungeraden Primzahl ist.

Die Formel (2.) hat man nun auf alle Factoren der rechten Seite von (1.) anzuwenden. Es ist aber:

$$(3.)\quad \left(\frac{D}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{D}{\nu}\right)\cdot\left(\frac{D}{\pi}\right)\cdots = \left(\frac{D}{n}\right),$$

ferner:

$$(4.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\frac{n^p}{\mu^p}}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\frac{n^p}{\nu^p}}{\nu}\right)\cdot\left(\frac{\frac{n^p}{\pi_p}}{\pi}\right)\cdots \\ = \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^p\cdot\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^p\cdots\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^p\cdot\left(\frac{\pi}{\nu}\right)^p\cdots\left(\frac{\mu}{\pi}\right)^p\cdot\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^p\cdots \\ = \left\{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\nu}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\mu}{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\nu}{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{\nu}\right)\cdots\right\}^p \\ = i^{2p\left\{\frac{\mu-1}{2}\cdot\frac{\nu-1}{2}+\frac{\mu-1}{2}\cdot\frac{\pi-1}{2}+\frac{\nu-1}{2}\cdot\frac{\pi-1}{2}+\cdots\right\}} \end{cases}$$

nach dem Reciprocitätsgesetz der quadratischen Reste.

Endlich hat man noch:

$$(5.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\pi-1}{2}\right)^2+\cdots \\ \cdots+2\left(\frac{\mu-1}{2}\,\frac{\nu-1}{2}+\frac{\mu-1}{2}\,\frac{\pi-1}{2}+\frac{\nu-1}{2}\,\frac{\pi-1}{2}+\cdots\right) \\ = \left(\frac{\mu-1}{2}+\frac{\nu-1}{2}+\frac{\pi-1}{2}+\cdots\right)^2 \equiv \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \pmod{4}, \end{cases}$$

und mit Berücksichtigung der Relationen (3.), (4.), (5.) ergiebt sich aus (1.) und (2.):

$$(6.)\quad \varphi\{\gamma\}(n) = \left(\frac{D}{n}\right) i^{p\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} n^{\frac{p}{2}}.$$

§. 7.

Bestimmung von $\varphi\{\gamma\}(q^{l_1}, q^{l_2}, \ldots q^{l_p})$, wenn die Determinante der γ durch q theilbar ist.

Um die Function $\varphi\{\gamma\}(n_1, n_2, \ldots n_p)$ in allen Fällen bestimmen zu können, in denen $n_1, n_2, \ldots n_p$ ungerade Zahlen sind, hat man nur noch die Kenntniss von $\varphi\{\gamma\}(q^{l_1}, q^{l_2}, \ldots q^{l_p})$ nöthig auch für den Fall, wo die Determinante D der Grössen γ durch die ungerade Primzahl q theilbar ist.

Wir beginnen die Untersuchung mit dem Fall $p = 2$, suchen also den Werth der Summe zu finden:

$$(1.)\quad \varphi\begin{Bmatrix}\gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}\\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}\end{Bmatrix}(q^{\lambda_1}, q^{\lambda_2}) = \sum_{s_1, s_2} e^{2\pi i\left\{\frac{(\gamma_1^{(1)}s_1+\gamma_1^{(2)}s_2)s_1}{q^{\lambda_1}}+\frac{(\gamma_2^{(1)}s_1+\gamma_2^{(2)}s_2)s_2}{q^{\lambda_2}}\right\}},$$

wo nach unserer allgemeinen Voraussetzung:

$$(2.)\quad \frac{\gamma_1^{(2)}}{q^{\lambda_1}} = \frac{\gamma_2^{(1)}}{q^{\lambda_2}}$$

und

$$(3.)\quad D = \gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(2)} - \gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(1)} = q^{\tau}D',$$

wenn D' nicht mehr durch q theilbar ist. s_1, s_2 haben in der Summe (1.) vollständige Restsysteme zu durchlaufen, resp. nach den Moduln q^{λ_1}, q^{λ_2}.

Zunächst bemerken wir, dass man bei Bestimmung der Summe (1.) annehmen darf, einer der Coefficienten $\gamma_1^{(1)}$, $\gamma_2^{(2)}$, etwa $\gamma_1^{(1)}$ sei durch q nicht theilbar. Denn ist sowohl $\gamma_1^{(1)}$ als $\gamma_2^{(2)}$ durch q theilbar, so folgt aus (3.), dass entweder $\gamma_1^{(2)}$ oder $\gamma_2^{(1)}$ durch q theilbar sein muss. Es seien also $\gamma_1^{(1)}$ und $\gamma_1^{(2)}$ durch q theilbar; dann geht die Summe (1.) in folgende über:

$$(4.)\quad q\sum_{s_1, s_2} e^{2\pi i\left\{\frac{\left(\frac{\gamma_1^{(1)}}{q}s_1+\frac{\gamma_1^{(2)}}{q}s_2\right)s_1}{q^{\lambda_1-1}}+\frac{(\gamma_2^{(1)}s_1+\gamma_2^{(2)}s_2)s_2}{q^{\lambda_2}}\right\}} = q\varphi\begin{Bmatrix}\frac{\gamma_1^{(1)}}{q}, & \frac{\gamma_1^{(2)}}{q}\\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}\end{Bmatrix}(q^{\lambda_1-1}, q^{\lambda_2}),$$

wo in der Summe linker Hand s_1 nur noch ein vollständiges Restsystem nach dem Modul q^{λ_1-1} zu durchlaufen hat. Dieses Reductionsverfahren kann nun fortgesetzt angewandt werden, bis im Exponenten der Coefficient von s_1^2 oder der von s_2^2 oder endlich die Determinante der Coefficienten durch q nicht mehr theilbar ist. Stösst man auf den letzteren Umstand, so ist zur Bestimmung der Summe das Verfahren des §. 5 anzuwenden; im andern Fall erhält man eine Summe von der Form (1.), in der $\gamma_1^{(1)}$ oder $\gamma_2^{(2)}$ nicht durch q theilbar ist. Es sei also jetzt $\gamma_1^{(1)}$ durch q untheilbar. Der Summe (1.) kann dann die Form gegeben werden:

$$(5.)\quad \varphi\{\gamma\}(q^{\lambda_1}, q^{\lambda_2}) = \sum_{s_1, s_2} e^{2\pi i\left\{\frac{(\gamma_1^{(1)}s_1+\gamma_1^{(2)}s_2)^2}{\gamma_1^{(1)}q^{\lambda_1}}+\frac{q^{\tau}D's_2^2}{\gamma_1^{(1)}q^{\lambda_2}}\right\}}.$$

Ersetzt man hierin, was wegen der Untheilbarkeit von $\gamma_1^{(1)}$ durch q freisteht, s_1 durch $\gamma_1^{(1)}s_1$, so wird die Summe:

$$(6.)\quad \varphi\{\gamma\}(q^{\lambda_1}, q^{\lambda_2}) = \sum_{s_1, s_2} e^{2\pi i\left\{\frac{\gamma_1^{(1)}(s_1+\gamma_1^{(2)}s_2)^2}{q^{\lambda_1}}+\frac{\gamma_1^{(1)}q^{\tau}D's_2^2}{q^{\lambda_2}}\right\}}.$$

Nun hat

$$\sum_{s_1} e^{2\pi i \frac{\gamma_1^{(1)}(s_1-\gamma_1^{(2)}s_2)^2}{q^{l_1}}}$$

den Werth

$$\left(\frac{\gamma_1^{(1)}}{q^{l_1}}\right) i^{\left(\frac{q^{l_1}-1}{2}\right)^2} \sqrt{q^{l_1}}.$$

Ferner hat die Summe

$$\sum_{s_2} e^{2\pi i \frac{\gamma_1^{(1)} D' s_2^2}{q^{l_2-\tau}}}$$

den Werth

$$q^{\tau}\left(\frac{\gamma_1^{(1)} D'}{q^{l_2-\tau}}\right) i^{\left(\frac{q^{l_2-\tau}-1}{2}\right)^2} \sqrt{q^{l_2-\tau}},$$

wenn $\tau \leqq l_2$, oder den Werth q^{l_2}, wenn $\tau > l_2$ ist. Man erhält demnach für die gesuchte Summe folgenden Werth:

$$7^a.)\qquad \varphi\begin{Bmatrix}\gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}\\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}\end{Bmatrix}(q^{l_1}, q^{l_2}) = \left(\frac{\gamma_1^{(1)}}{q^{l_1}}\right)\left(\frac{\gamma_1^{(1)} D'}{q^{l_2-\tau}}\right) i^{\left(\frac{q^{l_1}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{q^{l_2-\tau}-1}{2}\right)^2} \sqrt{q^{l_1-l_2-\tau}},$$

wenn $\tau \leqq l_2$,

$$(7^b.)\qquad \varphi\begin{Bmatrix}\gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}\\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}\end{Bmatrix}(q^{l_1}, q^{l_2}) = \left(\frac{\gamma_1^{(1)}}{q^{l_1}}\right) i^{\left(\frac{q^{l_1}-1}{2}\right)^2} q^{l_2}\sqrt{q^{l_1}}\ ^{*}),$$

wenn $\tau > l_2$;

für den Fall $\tau = l_2$ geben beide Formeln dasselbe Resultat.

Da man schon in dem besonderen Fall $p = 2$ nicht zu einer alle Fälle umfassenden Endformel gelangt, so wird man nicht erwarten dürfen, ohne eine äusserst complicirte Unterscheidung vieler verschiedener Möglichkeiten im allgemeinen Fall eine entwickelte Endformel zu erhalten. Man wird sich daher damit begnügen müssen, einen Weg zu finden, auf dem der Werth der

*) Die auffallende Unsymmetrie, welche diese Formel in Bezug auf l_1 und l_2 zeigt, erklärt sich aus dem Umstand, dass $\gamma_1^{(1)}$ und $\gamma_2^{(2)}$ nur dann beide durch q untheilbar sein können, während D durch q theilbar ist, wenn l_1 und l_2 einander gleich sind, denn sonst muss stets eine der Grössen $\gamma_1^{(2)}$, $\gamma_2^{(1)}$ durch q theilbar sein. In der Formel (7^b.) ist auch der Fall $D = 0$ enthalten.

fraglichen Summe in jedem Fall gewonnen werden kann, indem nachgewiesen wird, wie man die p fache Summe finden kann, vorausgesetzt, dass man die $p-1$ fachen und $p-2$ fachen entsprechend gebildeten Summen kennt. Da man die einfache und zweifache Summe kennt, so kann man dann immer die allgemeine Summe finden.

Man kann in der allgemeinen Function

$$\varphi\begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}, & \dots & \gamma_1^{(p)} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}, & \dots & \gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(1)}, & \gamma_p^{(2)}, & \dots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(q^{l_1}, q^{l_2}, \dots q^{l_p})$$

annehmen, es seien nicht alle γ einer und derselben Horizontalreihe durch q theilbar, denn sind z. B. die Grössen $\gamma_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)}, \dots \gamma_1^{(p)}$ alle durch q theilbar, so ist, wie schon in der Einleitung gezeigt wurde:

$$(8.)\quad \begin{cases} \varphi\begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}, & \dots & \gamma_1^{(p)} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}, & \dots & \gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(1)}, & \gamma_p^{(2)}, & \dots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(q^{l_1}, q^{l_2}, \dots q^{l_p}) \\ = q\cdot\varphi\begin{Bmatrix} \frac{\gamma_1^{(1)}}{q}, & \frac{\gamma_1^{(2)}}{q}, & \dots & \frac{\gamma_1^{(p)}}{q} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}, & \dots & \gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(1)}, & \gamma_p^{(2)}, & \dots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(q^{l_1-1}, q^{l_2}, \dots q^{l_p}), \end{cases}$$

und diese Formel lässt sich so oft anwenden, bis nicht mehr alle in einer Horizontalreihe stehenden Coefficienten durch q theilbar sind.

Es sind bei der Reduction der Function φ nun zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Die Grössen $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \dots \gamma_p^{(p)}$ sind nicht alle durch q theilbar, etwa $\gamma_1^{(1)}$ durch q untheilbar:

Setzt man, wie früher:

$$(9.)\quad \varphi\{\gamma\}(q^{l_1}, q^{l_2}, \dots q^{l_p}) = \sum_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{2\pi i f(s_1, s_2, \dots s_p)},$$

worin:

$$(10.)\quad \begin{cases} f(s_1, s_2, \dots s_p) = \sum\limits_\varkappa \sum\limits_\lambda c_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda, \\ \qquad c_{\varkappa\lambda} = \frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)}}{q^{l_\varkappa}} = \frac{\gamma_\lambda^{(\varkappa)}}{q^{l_\lambda}}, \end{cases}$$

so lässt sich f auf folgende Form bringen:

$$(11.)\quad f(s_1, s_2, \dots s_p) = \frac{(\gamma_1^{(1)} s_1 + \gamma_1^{(2)} s_2 + \dots + \gamma_1^{(p)} s_p)^2}{\gamma_1^{(1)} q^{l_1}} + \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=p} \sum_{\lambda=2}^{\lambda=p} c'_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda,$$

worin:

$$c'_{\varkappa\lambda} = \frac{c_{\varkappa\lambda} c_{11} - c_{\varkappa 1} c_{\lambda 1}}{c_{11}}$$

$$= \frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)} \gamma_1^{(1)} - \gamma_\varkappa^{(1)} \gamma_1^{(\lambda)}}{\gamma_1^{(1)} q^{l_\varkappa}} = \frac{\gamma_\lambda^{(\varkappa)} \gamma_1^{(1)} - \gamma_\lambda^{(1)} \gamma_1^{(\varkappa)}}{\gamma_1^{(1)} q^{l_\lambda}}.$$

Wenn man nun im Exponenten, was freisteht, $s_2, s_3, \dots s_p$ resp. durch $s_2 \gamma_1^{(1)}, s_3 \gamma_1^{(1)}, \dots s_p \gamma_1^{(1)}$ ersetzt, so geht mittelst dieser Transformation die Formel (11.) in folgende über:

$$(12.)\quad \begin{cases} \varphi\{\gamma\}(q^{l_1}, q^{l_2}, \dots q^{l_p}) \\ = \sum\limits_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{2\pi i \frac{\gamma_1^{(1)}(s_1 + \gamma_1^{(2)} s_2 + \dots + \gamma_1^{(p)} s_p)^2}{q^{l_1}}} e^{2\pi i \sum\limits_2^p \sum\limits_2^p c''_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda}, \end{cases}$$

worin:

$$(13.)\quad c''_{\varkappa\lambda} = \frac{\gamma_1^{(1)}(\gamma_\varkappa^{(\lambda)} \gamma_1^{(1)} - \gamma_\varkappa^{(1)} \gamma_1^{(\lambda)})}{q^{l_\varkappa}} = \frac{\gamma_1^{(1)}(\gamma_\lambda^{(\varkappa)} \gamma_1^{(1)} - \gamma_\lambda^{(1)} \gamma_1^{(\varkappa)})}{q^{l_\lambda}}.$$

Führt man in der Formel (12.) die Summation nach s_1 aus, so folgt:

$$(14.)\quad \varphi\{\gamma\}(q^{l_1}, q^{l_2}, \dots q^{l_p}) = \left(\frac{\gamma_1^{(1)}}{q^{l_1}}\right) i^{\left(\frac{q^{l_1}-1}{2}\right)^2} \sqrt{q^{l_1}} \sum_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{2\pi i \sum\limits_2^p \sum\limits_2^p c''_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda}.$$

Ist also $\gamma_1^{(1)}$ durch q untheilbar, so hat man die Reductionsformel:

$$(15.)\quad \begin{cases} \varphi\begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}, & \dots & \gamma_1^{(p)} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}, & \dots & \gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(1)}, & \gamma_p^{(2)}, & \dots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(q^{l_1}, q^{l_2}, \dots q^{l_p}) \\ = \left(\frac{\gamma_1^{(1)}}{q^{l_1}}\right) i^{\left(\frac{q^{l_1}-1}{2}\right)^2} \sqrt{q^{l_1}}\, \varphi\begin{Bmatrix} \gamma_2^{(2)\prime}, & \dots & \gamma_2^{(p)\prime} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(2)\prime}, & \dots & \gamma_p^{(p)\prime} \end{Bmatrix}(q^{l_2}, \dots q^{l_p}), \end{cases}$$

worin:

$$(16.)\quad \gamma_\varkappa^{(\lambda)\prime} = \gamma_1^{(1)}(\gamma_\varkappa^{(\lambda)} \gamma_1^{(1)} - \gamma_\varkappa^{(1)} \gamma_1^{(\lambda)}).$$

Die Determinante D' der Coefficienten $\gamma_\varkappa^{(\lambda)\prime}$ ist:

$$(17.)\quad D' = \gamma_1^{(1)^{2p-3}} D,$$

so dass hinsichtlich der Theilbarkeit der Determinante durch q für beide φ-Functionen in (15.) dasselbe gilt.

II. Wenn die Grössen $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \dots \gamma_p^{(p)}$ alle durch q theilbar sind, so muss nothwendig wenigstens eine der Determinanten

$$\gamma_\varkappa^{(\varkappa)}\gamma_\lambda^{(\lambda)} - \gamma_\varkappa^{(\lambda)}\gamma_\lambda^{(\varkappa)}$$

durch q untheilbar sein, wenn nicht alle in einer Horizontalreihe stehenden γ durch q theilbar sind. Wären nämlich alle $\gamma_\varkappa^{(\varkappa)}$ und gleichzeitig alle $\gamma_\varkappa^{(\varkappa)}\gamma_\lambda^{(\lambda)} - \gamma_\varkappa^{(\lambda)}\gamma_\lambda^{(\varkappa)}$ durch q theilbar, so müsste auch von den beiden Grössen $\gamma_\varkappa^{(\lambda)}, \gamma_\lambda^{(\varkappa)}$ nothwendig eine durch q theilbar sein, was auch $\varkappa, \lambda$ sein mögen. Nun ist aber:

$$\gamma_\varkappa^{(\lambda)} = q^{l_\varkappa - l_\lambda}\gamma_\lambda^{(\varkappa)}.$$

Ist also keiner der Exponenten $l_1, l_2, \dots l_p$ grösser als $l_\varkappa$, so folgt aus dieser Annahme, dass

$$\gamma_\varkappa^{(1)}, \quad \gamma_\varkappa^{(2)}, \quad \dots \quad \gamma_\varkappa^{(p)}$$

durch q theilbar sind, gegen die Voraussetzung, dass die γ einer Horizontalreihe mittelst der Reductionsformel (8.) von gemeinschaftlichen Factoren q befreit seien.

Nehmen wir also an, es sei

$$\delta_{12} = \gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(2)} - \gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(1)}$$

nicht durch q theilbar, so folgt zunächst, dass $l_1 = l_2$ sein muss, weil sonst eine der Grössen $\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(1)}$ durch q theilbar wäre, mithin ist auch

$$\gamma_1^{(2)} = \gamma_2^{(1)}$$

durch q untheilbar.

Es müssen nun in der quadratischen Form im Exponenten die Veränderlichen s_1, s_2 abgesondert werden. Dies geschieht durch folgende Transformation. Man setze zur Abkürzung:

$$(18.) \quad \begin{cases} \delta_\varkappa^{(1)} = \gamma_1^{(\varkappa)}\gamma_2^{(2)} - \gamma_2^{(1)}\gamma_2^{(\varkappa)}, \\ \delta_\varkappa^{(2)} = \gamma_2^{(\varkappa)}\gamma_1^{(1)} - \gamma_2^{(1)}\gamma_1^{(\varkappa)}, \\ \delta_{12} = \gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(2)} - \gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(1)}. \end{cases}$$

Dann hat man folgende identische Gleichung:

$$(19.) \quad \begin{cases} \sum\limits_1^p\sum\limits_1^p c_{\varkappa\lambda}s_\varkappa s_\lambda = \dfrac{\gamma_1^{(1)}}{q^{l_1}}\left(s_1 + \dfrac{\delta_3^{(1)}s_3 + \dots + \delta_p^{(1)}s_p}{\delta_{12}}\right)^2 + \dfrac{\gamma_2^{(2)}}{q^{l_1}}\left(s_2 + \dfrac{\delta_3^{(2)}s_3 + \dots + \delta_p^{(2)}s_p}{\delta_{12}}\right)^2 \\ \qquad + \dfrac{2\gamma_1^{(2)}}{q^{l_1}}\left(s_1 + \dfrac{\delta_3^{(1)}s_3 + \dots + \delta_p^{(1)}s_p}{\delta_{12}}\right)\left(s_2 + \dfrac{\delta_3^{(2)}s_3 + \dots + \delta_p^{(2)}s_p}{\delta_{12}}\right) \\ \qquad + \sum\limits_3^p\sum\limits_3^p c'_{\varkappa\lambda}s_\varkappa s_\lambda, \end{cases}$$

wenn

$$(20.)\qquad c'_{\varkappa\lambda} = \frac{\gamma_\lambda^{(\varkappa)}\delta_{12} - \gamma_\lambda^{(1)}\delta_\varkappa^{(1)} - \gamma_\lambda^{(2)}\delta_\varkappa^{(2)}}{q^{l_\lambda}\delta_{12}} = \frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)}\delta_{12} - \gamma_\varkappa^{(1)}\delta_\lambda^{(1)} - \gamma_\varkappa^{(2)}\delta_\lambda^{(2)}}{q^{l_\varkappa}\delta_{12}}$$

gesetzt wird.

Da nun der Voraussetzung gemäss δ_{12} durch q nicht theilbar ist, so kann man im Exponenten der Summe

$$s_3,\ s_4,\ \dots\ s_p \quad \text{ersetzen durch} \quad \delta_{12}s_3,\ \delta_{12}s_4,\ \dots\ \delta_{12}s_p.$$

Ferner kann man

$$s_1+\delta_3^{(1)}s_3+\dots+\delta_p^{(1)}s_p \quad \text{durch} \quad s_1,$$
$$s_2+\delta_3^{(2)}s_3+\dots+\delta_p^{(2)}s_p \quad \text{durch} \quad s_2$$

ersetzen, wenn man die Summationen nach s_1, s_2 zuerst ausgeführt annimmt, da diese Grössen gleichzeitig vollständige Restsysteme nach dem Modul q^{l_1} durchlaufen.

Demnach erhält man:

$$(21.)\qquad \varphi\{\gamma\}(q^{l_1}, q^{l_2}, \dots q^{l_p}) = \sum_{s_1, s_2} e^{2\pi i\frac{\gamma_1^{(1)}s_1^2+2\gamma_1^{(2)}s_1s_2+\gamma_2^{(2)}s_2^2}{q^{l_1}}} \sum_{s_3, \dots s_p} e^{2\pi i\sum\limits_3^p\sum\limits_3^p c''_{\varkappa\lambda}s_\varkappa s_\lambda},$$

worin

$$(22.)\qquad c''_{\varkappa\lambda} = \delta_{12}\frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)}\delta_{12} - \gamma_\varkappa^{(1)}\delta_\lambda^{(1)} - \gamma_\varkappa^{(2)}\delta_\lambda^{(2)}}{q^{l_\varkappa}} = \delta_{12}\frac{\gamma_\lambda^{(\varkappa)}\delta_{12} - \gamma_\lambda^{(1)}\delta_\varkappa^{(1)} - \gamma_\lambda^{(2)}\delta_\varkappa^{(2)}}{q^{l_\lambda}}.$$

In der Formel (21.) kann man nun die Summation nach s_1, s_2 ausführen nach den Vorschriften des §. 6, und man erhält

$$(23.)\qquad \varphi\{\gamma\}(q^{l_1}, q^{l_2}, \dots q^{l_p}) = \left(\frac{\delta_{12}}{q^{l_1}}\right) i^{2\left(\frac{q^{l_1}-1}{2}\right)^2} q^{l_1} \sum_{s_3, \dots s_p} e^{2\pi i\sum\limits_3^p\sum\limits_3^p c''_{\varkappa\lambda}s_\varkappa s_\lambda}.$$

Es ist aber

$$\left(\frac{\delta_{12}}{q^{l_1}}\right) = \left(\frac{-\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(1)}}{q}\right)^{l_1} = \left(\frac{-1}{q}\right)^{l_1} = i^{2l_1\left(\frac{q-1}{2}\right)^2},$$

also

$$\left(\frac{\delta_{12}}{q^{l_1}}\right) i^{2\left(\frac{q^{l_1}-1}{2}\right)^2} = 1.$$

Wenn also die Grössen $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \dots \gamma_p^{(p)}$ alle durch q theilbar sind, dagegen $\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(2)} - \gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(1)}$ nicht durch q theilbar ist, woraus folgt, dass $l_1 = l_2$ sein muss, so hat man die Reductionsformel:

$$(24.)\qquad \varphi\begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}, & \dots & \gamma_1^{(p)} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}, & \dots & \gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(1)}, & \gamma_p^{(2)}, & \dots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(q^{l_1}, q^{l_2}, \dots q^{l_p}) = q^{l_1}\varphi\begin{Bmatrix} \gamma_3^{(3)\prime}, & \dots & \gamma_3^{(p)\prime} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(3)\prime}, & \dots & \gamma_p^{(p)\prime} \end{Bmatrix}(q^{l_3}, \dots q^{l_p}),$$

worin

$$(25.)\qquad \gamma_x^{(\lambda)\prime} = \delta_{12}(\gamma_x^{(\lambda)}\delta_{12}-\gamma_x^{(1)}\delta_\lambda^{(1)}-\gamma_x^{(2)}\delta_\lambda^{(2)}).$$

Auch hier ist, wie leicht zu erkennen, die Determinante der $\gamma_x^{(\lambda)}$ und der $\gamma_x^{(\lambda)\prime}$ gleichzeitig durch q theilbar und untheilbar, denn bezeichnet man mit D' die Determinante der $\gamma_x^{(\lambda)\prime}$, so folgt leicht

$$D' = \delta_{12}^{2p-5}D.$$

Bei jeder weiteren Reduction der φ-Functionen auf der rechten Seite der Formeln (15.) oder (24.) sind dann wieder die verschiedenen Fälle zu unterscheiden, und darauf beruht die Schwierigkeit, zu einer alle Fälle umfassenden Endformel zu gelangen. Es sind aber im Bisherigen die Mittel enthalten, die Function $\varphi\{\gamma\}(n_1, n_2, \ldots n_p)$ in allen Fällen zu bestimmen, in denen die $n_1, n_2, \ldots n_p$ sämmtlich ungerade Zahlen sind, und es bleibt nur der eine Fall zu erledigen, wo $n_1, n_2, \ldots n_p$ Potenzen von 2 sind.

§. 8.

Bestimmung von $\varphi\{\gamma\}(2^{l_1}, 2^{l_2}, \ldots 2^{l_p})$.

Um zunächst den einfachsten Fall zu erledigen, sei $l_1 = 1$, dann ist

$$(1.)\qquad \varphi\{\gamma\}(2, 2^{l_2}, \ldots 2^{l_p}) = \sum_{s_1} e^{\frac{2\pi i s_1^2 \gamma_1^{(1)}}{2}} \varphi\begin{Bmatrix} \gamma_2^{(2)}, & \gamma_3^{(2)}, & \ldots & \gamma_p^{(2)} \\ \gamma_2^{(3)}, & \gamma_3^{(3)}, & \ldots & \gamma_p^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_2^{(p)}, & \gamma_3^{(p)}, & \ldots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(2^{l_2}, \ldots 2^{l_p}).$$

Diese Summe hat aber den Werth Null, falls $\gamma_1^{(1)}$ nicht durch 2 theilbar ist. Ist $\gamma_1^{(1)}$ durch 2 theilbar, so erhält man:

$$(2.)\qquad \varphi\begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_2^{(1)}, & \ldots & \gamma_p^{(1)} \\ \gamma_1^{(2)}, & \gamma_2^{(2)}, & \ldots & \gamma_p^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_1^{(p)}, & \gamma_2^{(p)}, & \ldots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(2, 2^{l_2}, \ldots 2^{l_p}) = 2\varphi\begin{Bmatrix} \gamma_2^{(2)}, & \gamma_3^{(2)}, & \ldots & \gamma_p^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_2^{(p)}, & \gamma_3^{(p)}, & \ldots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(2^{l_2}, \ldots 2^{l_p}).$$

Der Fall, wo in der Function $\varphi\{\gamma\}(2^{l_1}, 2^{l_2}, \ldots 2^{l_p})$ einer der Exponenten $l_1, l_2, \ldots l_p$, etwa l_x den Werth 1 hat, ist damit vollständig erledigt; die Summe hat den Werth Null, wenn das entsprechende $\gamma_x^{(x)}$ ungerade ist. Ist dagegen $\gamma_x^{(x)}$ gerade, so reducirt sich die Summe auf eine mit 2 multiplicirte einfachere Summe derselben Art.

Es ist also nur noch die Summe zu bestimmen:

$$\varphi\{\gamma\}(2^{2k_1}r_1, 2^{2k_2}r_2, \dots 2^{2k_p}r_p),$$

worin $k_1, k_2, \dots k_p$ grösser als Null sind, und die $r_1, r_2, \dots r_p$ die Werthe 1 oder 2 haben. Die Untersuchung soll auch hier wieder zunächst unter der Voraussetzung durchgeführt werden, dass die Determinante D der Coefficienten γ eine ungerade Zahl ist. Man kann in diesem Falle, ganz ähnlich wie in §. 5 geschehen ist, nach dem Vorgang von *Gauss* verfahren.

Man setze

$$(3.)\qquad f(s_1, s_2, \dots s_p) = \sum_i \sum_h c_{ih} s_i s_h,$$

$$(4.)\qquad c_{ih} = \frac{\gamma_i^{(h)}}{2^{2k_i} r_i} = \frac{\gamma_h^{(i)}}{2^{2k_h} r_h},$$

und daraus folgt:

$$(5.)\qquad \frac{\gamma_i^{(h)}}{2^{k_i - k_h} r_i} = \frac{\gamma_h^{(i)}}{2^{k_h - k_i} r_h} = \frac{c_i^{(h)}}{r_i} = \frac{c_h^{(i)}}{r_h}.$$

Wie in §. 5 schliesst man auch hier, dass $c_i^{(h)}$, $c_h^{(i)}$ ganze Zahlen sein müssen. Man kann nun wieder wie dort setzen:

$$(6.)\qquad \begin{cases} \varphi\{\gamma\}(2^{2k_1}r_1, 2^{2k_2}r_2, \dots 2^{2k_p}r_p) \\ = \sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p} \sum\limits_{\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_p} e^{2\pi i f(\lambda_1 + \varrho_1 r_1 2^{k_1}, \lambda_2 + \varrho_2 r_2 2^{k_2}, \dots \lambda_p + \varrho_p r_p 2^{k_p})}, \end{cases}$$

worin die Summe zu erstrecken ist:

für ϱ_1 über ein vollständiges Restsystem (mod. 2^{k_1}),
- ϱ_2 - - - - (mod. 2^{k_2}),
. . . .
- ϱ_p - - - - (mod. 2^{k_p});
für λ_1 über ein vollständiges Restsystem (mod. $r_1 2^{k_1}$),
- λ_2 - - - - (mod. $r_2 2^{k_2}$),
. . . .
- λ_p - - - - (mod. $r_p 2^{k_p}$).

Man schliesst nun genau wie oben, dass die Summen in Bezug auf $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_p$ immer dann den Werth Null haben, wenn nicht gleichzeitig

$$r_1 2^{k_1} f'(\lambda_1), \quad r_2 2^{k_2} f'(\lambda_2), \quad \dots \quad r_p 2^{k_p} f'(\lambda_p)$$

ganze Zahlen sind. Für Werthe von $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ aber, welche dieser Bedingung genügen, ergiebt die nach $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_p$ ausgeführte Summation den Werth:

$$2^{k_1 + k_2 + \dots + k_p} e^{2\pi i f(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p)}.$$

Nach der Bedeutung von $f'(\lambda_1)$, $f'(\lambda_2)$, ... $f'(\lambda_p)$ sind aber nur diejenigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ beizubehalten, für welche die Bedingung erfüllt ist:

$$(7.)\quad \begin{cases} \gamma_1^{(1)}\lambda_1+\gamma_1^{(2)}\lambda_2+\cdots+\gamma_1^{(p)}\lambda_p = h_1 2^{k_1-1}, \\ \gamma_2^{(1)}\lambda_1+\gamma_2^{(2)}\lambda_2+\cdots+\gamma_2^{(p)}\lambda_p = h_2 2^{k_2-1}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \gamma_p^{(1)}\lambda_1+\gamma_p^{(2)}\lambda_2+\cdots+\gamma_p^{(p)}\lambda_p = h_p 2^{k_p-1}, \end{cases}$$

worin $h_1, h_2, \dots h_p$ irgend ganze Zahlen sind. Ersetzt man nach den Formeln (5.) die $\gamma_i^{(h)}$ durch die $c_i^{(h)}$, so lautet diese Bedingung:

$$(8.)\quad \begin{cases} c_1^{(1)}2^{-k_1+1}\lambda_1+c_1^{(2)}2^{-k_2+1}\lambda_2+\cdots+c_1^{(p)}2^{-k_p+1}\lambda_p = h_1, \\ c_2^{(1)}2^{-k_1+1}\lambda_1+c_2^{(2)}2^{-k_2+1}\lambda_2+\cdots+c_2^{(p)}2^{-k_p+1}\lambda_p = h_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_p^{(1)}2^{-k_1+1}\lambda_1+c_p^{(2)}2^{-k_2+1}\lambda_2+\cdots+c_p^{(p)}2^{-k_p+1}\lambda_p = h_p. \end{cases}$$

Da nun die Determinante der Grössen $c_i^{(h)}$ gleich derjenigen der $\gamma_i^{(h)}$ ist, so folgt wie in §. 5, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichungen (8.) die ist, dass

$$\lambda_1 \text{ durch } 2^{k_1-1},\ \lambda_2 \text{ durch } 2^{k_2-1},\ \dots\ \lambda_p \text{ durch } 2^{k_p-1}$$

theilbar sei.

Zur Bildung der nach $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ genommenen Summe in (6.) kann man also setzen:

$$\lambda_1 = 2^{k_1-1}\lambda_1',\quad \lambda_2 = 2^{k_2-1}\lambda_2',\quad \dots\quad \lambda_p = 2^{k_p-1}\lambda_p',$$

wo dann

λ_1' ein Restsystem nach dem Modul $2r_1$,
λ_2' - - - - - $2r_2$,
. . . .
λ_p' - - - - - $2r_p$

zu durchlaufen hat.

Demnach geht die Gleichung (6.) in folgende über:

$$(9.)\quad \begin{cases} \varphi\{\gamma\}(2^{2k_1}r_1, 2^{2k_2}r_2, \dots 2^{2k_p}r_p) \\ = 2^{k_1+k_2+\cdots+k_p} \sum\limits_{\lambda_1', \lambda_2', \dots \lambda_p'} e^{2\pi i f(2^{k_1-1}\lambda_1', 2^{k_2-1}\lambda_2', \dots 2^{k_p-1}\lambda_p')}, \end{cases}$$

oder indem man für die Function f ihren Ausdruck setzt,

$$(10.)\quad \varphi = 2^{k_1+k_2+\cdots+k_p} \sum_{\lambda_1', \lambda_2', \dots \lambda_p'} e^{2\pi i \sum\limits_h \sum\limits_k \frac{c_h^{(k)}\lambda_h'\lambda_k'}{4r_h}}.$$

Man erhält nun den 2^p fachen Werth der Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung, wenn man

$$\begin{array}{llllll} \lambda_1' & \text{ein Restsystem nach dem Modul} & & & & 4r_1, \\ \lambda_2' & - & - & - & - & 4r_2, \\ \ldots & \ldots & & & & \\ \lambda_p' & - & - & - & - & 4r_p \end{array}$$

durchlaufen lässt, da sich die einzelnen Glieder der Summe nicht ändern, wenn man λ_h' um ein ganzes Vielfaches von $2r_h$ vermehrt. Beachtet man dies, so ergiebt sich aus (10.) für φ folgende Reductionsformel:

$$(11.)\quad \begin{cases} \varphi\begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}, & \ldots & \gamma_1^{(p)} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}, & \ldots & \gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(1)}, & \gamma_p^{(2)}, & \ldots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(2^{2k_1}r_1, 2^{2k_2}r_2, \ldots 2^{2k_p}r_p) \\ = 2^{k_1+k_2+\cdots+k_p-p}\,\varphi\begin{Bmatrix} c_1^{(1)}, & c_1^{(2)}, & \ldots & c_1^{(p)} \\ c_2^{(1)}, & c_2^{(2)}, & \ldots & c_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_p^{(1)}, & c_p^{(2)}, & \ldots & c_p^{(p)} \end{Bmatrix}(4r_1, 4r_2, \ldots 4r_p). \end{cases}$$

Um noch die Function $\varphi\{c\}(4r_1, 4r_2, \ldots 4r_p)$ zu bestimmen, werde zunächst die Annahme gemacht, die Coefficienten c lassen sich so anordnen, dass die in folgendem Schema:

$$(12.)\quad \begin{vmatrix} c_1^{(1)} & c_1^{(2)} & c_1^{(3)} & \ldots & c_1^{(p)} \\ c_2^{(1)} & c_2^{(2)} & c_2^{(3)} & \ldots & c_2^{(p)} \\ c_3^{(1)} & c_3^{(2)} & c_3^{(3)} & \ldots & c_3^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_p^{(1)} & c_p^{(2)} & c_p^{(3)} & \ldots & c_p^{(p)} \end{vmatrix}$$

angedeuteten Determinanten alle ungerade Zahlen seien. Man bezeichne diese Determinanten wie in §. 4 mit $D_1, D_2, D_3, \ldots D_p$, so dass

$$(13.)\quad D_1 = c_1^{(1)},\quad D_2 = c_1^{(1)}c_2^{(2)} - c_1^{(2)}c_2^{(1)},\quad \ldots\quad D_p = D.$$

Man schliesst durch Induction leicht auf folgende Formel:

$$(14.)\quad \varphi\{c\}(4r_1, 4r_2, \ldots 4r_p) = i^{-\sigma}(1+i)^p\sqrt{4r_1.4r_2\ldots 4r_p},$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(15.)\quad \sigma = \left(\frac{1-D_1}{2}\right)^{\frac{2}{r_1}} + \left(\frac{1-D_1D_2}{2}\right)^{\frac{2}{r_2}} + \cdots + \left(\frac{1-D_{p-1}D_p}{2}\right)^{\frac{2}{r_p}}.$$

Diese Formel ist richtig für den Fall $p=1$ und lässt sich leicht auch für $p=2$ nachweisen. Wir zeigen gleich allgemein, dass sie für p gültig ist, vorausgesetzt, dass sie für $p-1$ zutrifft.

Zu diesem Behufe wendet man die schon mehrfach gebrauchte Transformation an. Man hat:

$$(16.)\quad \sum_1^p\sum_1^p \frac{c_\varkappa^{(\lambda)} s_\varkappa s_\lambda}{4r_\varkappa} = \frac{(c_1^{(1)}s_1+c_1^{(2)}s_2+\cdots+c_1^{(p)}s_p)^2}{4r_1\,c_1^{(1)}}+\sum_2^p\sum_2^p \frac{c_\varkappa^{(\lambda)\prime} s_\varkappa s_\lambda}{4r_\varkappa\, c_1^{(1)}},$$

worin

$$(17.)\quad c_\varkappa^{(\lambda)\prime} = c_1^{(1)} c_\varkappa^{(\lambda)} - c_\varkappa^{(1)} c_1^{(\lambda)}$$

und

$$\frac{c_\varkappa^{(\lambda)\prime}}{r_\varkappa} = \frac{c_\lambda^{(\varkappa)\prime}}{r_\lambda}.$$

Da vorausgesetzter Massen $c_1^{(1)}$ ungerade ist, darf man im Exponenten unter dem Summenzeichen $s_2, s_3, \ldots s_p$ ersetzen durch $c_1^{(1)}s_2, c_1^{(1)}s_3, \ldots c_1^{(1)}s_p$, ferner $s_1+c_1^{(2)}s_2+\cdots+c_1^{(p)}s_p$ durch s_1 und erhält demnach:

$$(18.)\quad \begin{cases} \varphi\begin{pmatrix} c_1^{(1)}, & c_1^{(2)}, & \ldots & c_1^{(p)} \\ c_2^{(1)}, & c_2^{(2)}, & \ldots & c_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_p^{(1)}, & c_p^{(2)}, & \ldots & c_p^{(p)} \end{pmatrix}(4r_1, 4r_2, \ldots 4r_p) \\ = \sum\limits_{s_1} e^{\frac{2\pi i c_1^{(1)} s_1^2}{4r_1}}\, \varphi\begin{pmatrix} c_1^{(1)}c_2^{(2)\prime}, & \ldots & c_1^{(1)}c_2^{(p)\prime} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1^{(1)}c_p^{(2)\prime}, & \ldots & c_1^{(1)}c_p^{(p)\prime} \end{pmatrix}(4r_2, \ldots 4r_p). \end{cases}$$

Hierin lässt sich die Summation nach s_1 unmittelbar ausführen, sie ergiebt den Werth:

$$(19.)\quad \sum_{s_1} e^{\frac{2\pi i c_1^{(1)} s_1^2}{4r_1}} = i^{-\left(\frac{1-c_1^{(1)}}{2}\right)^{\frac{2}{r_1}}}(1+i)\sqrt{4r_1}.$$

Die auf der rechten Seite noch übrig bleibende Summe nach $s_2, s_3, \ldots s_p$ lässt sich finden nach der für $p-1$ als richtig vorausgesetzten Formel (14.). Bezeichnet man nämlich mit $D_1', D_2', \ldots D_{p-1}'$ die nach Analogie des Schemas (12.) aus den Grössen $c_1^{(1)}c_\varkappa^{(\lambda)\prime}$ gebildeten Determinanten, so folgt leicht:

$$(20.)\quad D_1' = c_1^{(1)} D_2,\quad D_2' = c_1^{(1)^3} D_3,\quad \ldots\quad D_{p-1}' = c_1^{(1)^{2p-3}} D_p,$$

so dass nach der Voraussetzung auch $D_1', D_2', \ldots D_{p-1}'$ durch 2 nicht theilbar sind.

Die Formel (14.) liefert also für diesen Fall:

$$(21.)\qquad \varphi\begin{Bmatrix} c_1^{(1)}c_2^{(2)\prime}, & \dots & c_1^{(1)}c_2^{(p)\prime} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_1^{(1)}c_p^{(2)\prime}, & \dots & c_1^{(1)}c_p^{(p)\prime} \end{Bmatrix}(4r_2, \dots 4r_p) = i^{-\sigma'}(1+i)^{p-1}\sqrt{4r_2, \dots 4r_p},$$

worin

$$\sigma' = \left(\frac{1-D'_1}{2}\right)^{\frac{2}{r_1}} + \left(\frac{1-D'_1D'_2}{2}\right)^{\frac{2}{r_2}} + \dots + \left(\frac{1-D'_{p-2}D'_{p-1}}{2}\right)^{\frac{2}{r_p}}.$$

Es ist aber

$$\frac{1-D'_{x-2}D'_{x-1}}{2} = \frac{1-c_1^{(1)^{4x-8}}D_{x-1}D_x}{2},$$

und da

$$c_1^{(1)^{4x-8}} \equiv 1 \pmod{8}$$

ist, so erhält man:

$$\sigma' \equiv \left(\frac{1-D_1D_2}{2}\right)^{\frac{2}{r_1}} + \left(\frac{1-D_1D_2}{2}\right)^{\frac{2}{r_2}} + \dots + \left(\frac{1-D_{p-1}D_p}{2}\right)^{\frac{2}{r_p}} \pmod{4}.$$

Beachtet man dies, so folgt sofort aus (18.), (19.), (21.) die Formel (14.).

Sind die hier gestellten Bedingungen nicht alle erfüllt, während immer noch die Determinante D ungerade ist, so lässt sich stets die Summe (11.) durch directe Addition von höchstens 4^p Gliedern finden.

§. 9.

Recurrirendes Verfahren zur allgemeinen Bestimmung von $\varphi\{\gamma\}(2^{l_1}, 2^{l_2}, \dots 2^{l_p})$.

Zur allgemeinen Bestimmung der Function $\varphi\{\gamma\}(2^{l_1}, 2^{l_2}, \dots 2^{l_p})$ auch in dem Fall, wo D eine gerade Zahl ist, kann man Reductionsformeln aufstellen, die denen des §. 7 analog sind. Da die Ableitung derselben der dort gegebenen ganz ähnlich ist, so können wir uns hier kurz fassen.

Wir beginnen wieder mit dem Fall $p = 2$, also mit der Function:

$$(1.)\qquad \varphi\begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)} \end{Bmatrix}(2^{l_1}, 2^{l_2}) = \sum_{s_1}\sum_{s_2} e^{2\pi i\left\{\frac{(\gamma_1^{(1)}s_1+\gamma_1^{(2)}s_2)s_1}{2^{l_1}} + \frac{(\gamma_2^{(1)}s_1+\gamma_2^{(2)}s_2)s_2}{2^{l_2}}\right\}},$$

worin

$$(2.)\qquad \frac{\gamma_1^{(2)}}{2^{l_1}} = \frac{\gamma_2^{(1)}}{2^{l_2}}$$

und

$$(3.)\qquad \gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(2)} - \gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(1)} = D = 2^{\tau}D',$$

worin, falls nicht $D=0$ ist, D' ungerade sei. Aus denselben Gründen wie in §. 7 darf hier angenommen werden, es sei $\gamma_1^{(1)}$ ungerade.

Dann ergiebt sich, genau wie in §. 7 die Formel (6.) erhalten wurde:

$$(4.)\qquad \varphi\,|\gamma|(2^{l_1},2^{l_2}) = \sum_{s_1,s_2} e^{2\pi i\left\{\frac{\gamma_1^{(1)}(s_1+\gamma_1^{(2)}s_2)^2}{2^{l_1}}+\frac{\gamma_1^{(1)}2^{\tau}D's_2^2}{2^{l_2}}\right\}}.$$

Die Summation nach s_1 lässt sich nach bekannten Formeln ausführen und ergiebt:

$$(5.)\qquad \sum_{s_1} e^{2\pi i\frac{\gamma_1^{(1)}(s_1+\gamma_1^{(2)}s_2)^2}{2^{l_1}}} = i^{-\left(\frac{1-\gamma_1^{(1)}}{2}\right)^{\frac{2}{r_1}}}(1+i)\sqrt{2^{l_1}},$$

wenn man setzt:

$$2^{l_1} = 2^{2k_1}r_1$$

und unter r_1 entweder 1 oder 2 versteht, je nachdem l_1 gerade oder ungerade ist.

Bei der noch übrigen Summation nach s_2 hat man drei Fälle zu unterscheiden:

I. $\tau \geqq l_2$ oder $D=0$,

$$\sum_{s_2} e^{2\pi i\frac{\gamma_1^{(1)}2^{\tau}D's_2^2}{2^{l_2}}} = 2^{l_2};$$

II. $l_2-\tau=1$,

$$\sum_{s_2} e^{2\pi i\frac{\gamma_1^{(1)}2^{\tau}D's_2^2}{2^{l_2}}} = 0;$$

III. $l_2-\tau>1$, $2^{l_2-\tau}=2^{2k_2}r_2$, $r_2=1$ oder $=2$,

$$\sum_{s_2} e^{2\pi i\frac{\gamma_1^{(1)}2^{\tau}D's_2^2}{2^{l_2}}} = i^{-\left(\frac{1-\gamma_1^{(1)}D'}{2}\right)^{\frac{2}{r_2}}}(1+i)\sqrt{2^{l_2+\tau}}.$$

Danach erhält man für die gesuchte Summe folgende Werthe:

$$(6^a.)\qquad \varphi\begin{Bmatrix}\gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}\\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}\end{Bmatrix}(2^{l_1},2^{l_2}) = i^{-\left(\frac{1-\gamma_1^{(1)}}{2}\right)^{\frac{2}{r_1}}}(1+i)\,2^{l_2}\sqrt{2^{l_1}},\qquad \tau\geqq l_2;$$

$$(6^b.)\qquad \varphi\begin{Bmatrix}\gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}\\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}\end{Bmatrix}(2^{l_1},2^{l_2}) = 0,\qquad \tau=l_2-1;$$

$$(6^c.)\qquad \varphi\begin{Bmatrix}\gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}\\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}\end{Bmatrix}(2^{l_1},2^{l_2}) = i^{-\left(\frac{1-\gamma_1^{(1)}}{2}\right)^{\frac{2}{r_1}}-\left(\frac{1-\gamma_1^{(1)}D'}{2}\right)^{\frac{2}{r_2}}}(1+i)^2\sqrt{2^{l_1+l_2+\tau}},$$
$$\tau<l_2-1.$$

Bei der Bestimmung der allgemeinen Function:

$$(7.)\qquad \varphi\begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}, & \dots & \gamma_1^{(p)} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}, & \dots & \gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(1)}, & \gamma_p^{(2)}, & \dots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(2^{l_1}, 2^{l_2}, \dots 2^{l_p})$$

kann wie in §. 7 die Annahme gemacht werden, es seien nicht alle Grössen γ, die in einer Horizontalreihe stehen, gerade Zahlen. Man hat dann wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Es seien nicht alle $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \dots \gamma_p^{(p)}$ gerade, also etwa $\gamma_1^{(1)}$ ungerade. Durch dieselben Schlüsse wie in §. 7 erhält man die Gleichung:

$$(8.)\qquad \varphi\{\gamma\}(2^{l_1}, 2^{l_2}, \dots 2^{l_p}) = \sum_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{2\pi i \frac{\gamma_1^{(1)}(s_1+\gamma_1^{(2)}s_2+\dots+\gamma_1^{(p)}s_p)^2}{2^{l_1}}} e^{2\pi i \sum_2^p \sum_2^p c'_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda},$$

worin:

$$(9.)\qquad c'_{\varkappa\lambda} = \frac{\gamma_1^{(1)}(\gamma_\varkappa^{(\lambda)}\gamma_1^{(1)} - \gamma_\varkappa^{(1)}\gamma_1^{(\lambda)})}{2^{l_\varkappa}} = \frac{\gamma_1^{(1)}(\gamma_\lambda^{(\varkappa)}\gamma_1^{(1)} - \gamma_\lambda^{(1)}\gamma_1^{(\varkappa)})}{2^{l_\lambda}}.$$

Führt man hierin die Summation nach s_1 aus, indem man

$$2^{l_1} = 2^{2k_1} r_1$$

und r_1 gleich 1 oder gleich 2 setzt, so folgt die erste Reductionsformel:

$$(10.)\qquad \begin{cases} \varphi\begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}, & \dots & \gamma_1^{(p)} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}, & \dots & \gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(1)}, & \gamma_p^{(2)}, & \dots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(2^{l_1}, 2^{l_2}, \dots 2^{l_p}) \\ = i^{-\left(\frac{1-\gamma_1^{(1)}}{2}\right)^{\frac{2}{r_1}}} (1+i)\sqrt{2^{l_1}}\,\varphi\begin{Bmatrix} \gamma_2^{(2)\prime}, & \dots & \gamma_2^{(p)\prime} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(2)\prime}, & \dots & \gamma_p^{(p)\prime} \end{Bmatrix}(2^{l_2}, \dots 2^{l_p}), \end{cases}$$

worin

$$(11.)\qquad \gamma_\varkappa^{(\lambda)\prime} = \gamma_1^{(1)}(\gamma_\varkappa^{(\lambda)}\gamma_1^{(1)} - \gamma_\varkappa^{(1)}\gamma_1^{(\lambda)}).$$

Für die Determinante D' der Grössen $\gamma_\varkappa^{(\lambda)\prime}$ erhält man auch hier:

$$(12.)\qquad D' = \gamma_1^{(1)^{2p-3}} D,$$

so dass D' und D gleichzeitig gerade und ungerade sind.

II. Sind die Coefficienten $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \dots \gamma_p^{(p)}$ alle gerade Zahlen, so können nach unseren Voraussetzungen nicht alle die Determinanten

$$\delta_{\varkappa\lambda} = \gamma_\varkappa^{(\varkappa)}\gamma_\lambda^{(\lambda)} - \gamma_\varkappa^{(\lambda)}\gamma_\lambda^{(\varkappa)}$$

gerade sein, und man nehme an, es sei δ_{12} ungerade. Es fordert diese Annahme, dass $l_1 = l_2$ und mithin $\gamma_1^{(2)} = \gamma_2^{(1)}$ sei.

Durch dieselben Operationen, die zu der Formel (21.) in §. 7 führten, erhält man hier:

$$(13.)\quad \varphi\{\gamma\}(2^{l_1}, 2^{l_2}, \dots 2^{l_p}) = \sum_{s_1, s_2} e^{2\pi i \frac{\gamma_1^{(1)} s_1^2 + 2\gamma_1^{(2)} s_1 s_2 + \gamma_2^{(2)} s_2^2}{2^{l_1}}} \sum_{s_3, \dots s_p} e^{2\pi i \sum_3^p \sum_3^p c'_{\varkappa\lambda} s_\varkappa s_\lambda},$$

worin:

$$(14.)\quad c'_{\varkappa\lambda} = \delta_{12} \frac{\gamma_\varkappa^{(\lambda)} \delta_{12} - \gamma_\varkappa^{(1)} \delta_\lambda^{(1)} - \gamma_\varkappa^{(2)} \delta_\lambda^{(2)}}{2^{l_\varkappa}} = \delta_{12} \frac{\gamma_\lambda^{(\varkappa)} \delta_{12} - \gamma_\lambda^{(1)} \delta_\varkappa^{(1)} - \gamma_\lambda^{(2)} \delta_\varkappa^{(2)}}{2^{l_\lambda}}$$

und:

$$(15.)\quad \begin{cases} \delta_\varkappa^{(1)} = \gamma_1^{(\varkappa)} \gamma_2^{(2)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_2^{(\varkappa)}, \\ \delta_\varkappa^{(2)} = \gamma_2^{(\varkappa)} \gamma_1^{(1)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_1^{(\varkappa)}, \\ \delta_{12} = \gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)} - \gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(1)}. \end{cases}$$

Die auf s_1, s_2 bezügliche Doppelsumme lässt sich nach den Sätzen des §. 8 ausführen. Man erhält:

wenn l_1 eine gerade Zahl ist:

$$(16.)\quad \sum_{s_1, s_2} e^{2\pi i \frac{\gamma_1^{(1)} s_1^2 + 2\gamma_1^{(2)} s_1 s_2 + \gamma_2^{(2)} s_2^2}{2^{l_1}}} = (-1)^{\frac{\gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)}}{4}} 2^{l_1+1},$$

und wenn l_1 eine ungerade Zahl grösser als 1 ist:

$$(17.)\quad \sum_{s_1, s_2} e^{2\pi i \frac{\gamma_1^{(1)} s_1^2 + 2\gamma_1^{(2)} s_1 s_2 + \gamma_2^{(2)} s_2^2}{2^{l_1}}} = 2^{l_1+1},$$

wobei Gebrauch gemacht ist von der Voraussetzung, dass $\gamma_1^{(1)}$ und $\gamma_2^{(2)}$ gerade Zahlen sind.

Man kann beide Formeln in eine einzige zusammenfassen, wenn man auf der rechten Seite setzt:

$$(-1)^{\frac{\gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)}}{4}(l_1+1)} 2^{l_1+1},$$

oder auch:

$$\left(2(-1)^{\frac{\gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)}}{4}}\right)^{l_1+1}.$$

Man erhält demnach unter der Voraussetzung dass $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \dots \gamma_p^{(p)}$ gerade, dagegen $\gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)} - \gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(1)}$ ungerade sei, die Reductionsformel:

$$(18.)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi\begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}, & \dots & \gamma_1^{(p)} \\ \gamma_2^{(1)}, & \gamma_2^{(2)}, & \dots & \gamma_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(1)}, & \gamma_p^{(2)}, & \dots & \gamma_p^{(p)} \end{Bmatrix}(2^{l_1}, 2^{l_2}, \dots 2^{l_p}) \\ &= (-1)^{\frac{\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(2)}}{4}(l_1+1)} 2^{l_1+1}\varphi\begin{Bmatrix} \gamma_3^{(3)\prime}, & \dots & \gamma_3^{(p)\prime} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p^{(3)\prime}, & \dots & \gamma_p^{(p)\prime} \end{Bmatrix}(2^{l_3}, \dots 2^{l_p}), \end{aligned}\right.$$

worin:

$$(19.)\quad \gamma_x^{(\lambda)\prime} = \delta_{12}(\gamma_x^{(\lambda)}\delta_{12} - \gamma_x^{(1)}\delta_\lambda^{(1)} - \gamma_x^{(2)}\delta_\lambda^{(2)}).$$

Für die Determinante D' der Grössen $\gamma_x^{(\lambda)\prime}$ ergiebt sich:

$$D' = \delta_{12}^{2p-5} D,$$

so dass D und D' gleichzeitig gerade und ungerade sind.

Nach diesen Sätzen ist man im Stande, den Werth der Summe $\varphi\{\gamma\}(n_1, n_2, \dots n_p)$ in allen Fällen zu bestimmen, und zwar durch eine Reihe von Operationen, deren Anzahl nicht mit der Höhe der Zahlen $n_1, n_2, \dots n_p$ wächst. Die Anzahl der Operationen ist für jede in $n_1, n_2, \dots n_p$ enthaltene Potenz einer Primzahl höchstens p. Der Ausdruck für φ enthält ausser ganzzahligen Potenzen von i und $1+i$ nur Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen.

§. 10.

Untersuchung einer allgemeineren Classe von Summen.

Wir erörtern im Folgenden Summen von etwas allgemeinerer Form, die sich auf die bisher untersuchten zurückführen lassen. Es sei

$$(1.)\quad f(s_1, s_2, \dots s_p) = \sum_x \sum_\lambda c_{x\lambda} s_x s_\lambda,$$

und es wird nach dem Werth der Summe gefragt:

$$(2.)\quad \sum_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(s_1, s_2, \dots s_p) + (\nu_1 s_1 + \nu_2 s_2 + \dots + \nu_p s_p)\pi i},$$

worin $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_p$ ganze Zahlen bedeuten, für welche 0 oder 1 gesetzt werden kann. Wie bisher durchlaufen die Zahlen $s_1, s_2, \dots s_p$ Restsysteme nach dem Modul n.

Ist zunächst n eine ungerade Zahl, so ist die Zurückführung der Summe (2.) auf die oben betrachteten sehr einfach, wenn man die Forderung

stellt, dass der Werth der Summe von der speciellen Wahl der Restsysteme unabhängig sein soll, denn dann können $s_1, s_2, \dots s_p$ ersetzt werden durch $2s_1, 2s_2, \dots 2s_p$, wodurch die Glieder erster Ordnung im Exponenten herausfallen.

Mehr Schwierigkeiten, aber auch grösseres Interesse bietet der Fall eines geraden n, in welchem die Summe (2.) stets unabhängig ist von der Wahl der Restsysteme.

Es kann dann die Summe nicht ersetzt werden durch eine einzige Summe der früheren Art, sondern durch eine bestimmte Anzahl derselben.

Betrachten wir zunächst den Fall, wo nur eine der Grössen ν, etwa $\nu_1 = 1$ ist, die übrigen gleich Null sind.

Die Summe (2.) unterscheidet sich dann von der folgenden:

$$\sum_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(s_1, s_2, \dots s_p)}$$

nur dadurch, dass die Glieder, in denen s_1 ungerade ist, das entgegengesetzte Zeichen haben. Beachtet man dies, so ergiebt sich die Gleichung:

$$(3.)\quad \begin{cases} -\sum\limits_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(s_1, s_2, \dots s_p) + \pi i s_1} \\ = \sum\limits_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(s_1, s_2, \dots s_p)} - 2 \sum\limits_{s_1=0}^{s_1=\frac{n}{2}-1} \sum\limits_{s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(2s_1, s_2, \dots s_p)}. \end{cases}$$

In der zweiten Summe hat s_1 nur ein Restsystem nach dem Modul $\frac{n}{2}$ zu durchlaufen. Man erhält also den doppelten Werth der Summe, wenn man auch für s_1 ein Restsystem nach dem Modul n nimmt. Demnach geht die Formel (3.) über in folgende:

$$(4.)\quad \begin{cases} -\sum\limits_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(s_1, s_2, \dots s_p) + \pi i s_1} \\ = \sum\limits_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(s_1, s_2, \dots s_p)} - \sum\limits_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(2s_1, s_2, \dots s_p)}. \end{cases}$$

Allgemeiner ergiebt sich auf demselben Wege folgende Recursionsformel:

$$(5.)\quad\begin{cases} -\sum\limits_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(s_1, s_2, \dots s_p) + \pi i (s_1 + s_2 + \dots + s_q)} \\ = \sum\limits_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(s_1, s_2, \dots s_p) + \pi i (s_1 + s_2 + \dots + s_{q-1})} \\ -\sum\limits_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(s_1, s_2, \dots s_{q-1}, 2 s_q, \dots s_p) + \pi i (s_1 + s_2 + \dots + s_{q-1})} . \end{cases}$$

Daraus folgt leicht eine allgemeine Darstellung der gesuchten Summen.

Es sei in der Summe (2.):

$$\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_q = 1, \qquad \nu_{q+1} = \dots = \nu_p = 0.$$

Man bezeichne mit $h_1, h_2, \dots h_q$ Zahlen, die den Werth 1 oder 2 haben. Dann ist:

$$(6.)\quad\begin{cases} -\sum\limits_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(s_1, s_2, \dots s_p) + \pi i (s_1 + s_2 + \dots + s_q)} \\ = \mathbf{S}(-1)^{(h_1-1)+(h_2-1)+\dots+(h_q-1)} \sum\limits_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(h_1 s_1, h_2 s_2, \dots h_q s_q, s_{q+1}, \dots s_p)}, \end{cases}$$

worin das Zeichen $\mathbf{S}$ eine Summe bedeutet, die sich auf alle Combinationen der Werthe 1, 2 für $h_1, h_2, \dots h_q$ erstreckt. Ein Glied dieser letzteren Summe hat das Vorzeichen + oder −, je nachdem die Anzahl derjenigen h, welche gleich 2 sind, gerade oder ungerade ist.

Die Richtigkeit der Formel (6.) ergiebt sich sofort aus (5.) durch den Schluss von $q-1$ auf q.

Die Summen:

$$\sum_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(h_1 s_1, h_2 s_2, \dots h_q s_q, s_{q+1} \dots s_p)}$$

können aber nach den oben gegebenen Regeln bestimmt werden; die Anzahl dieser Summen, durch welche die gesuchte Summe dargestellt wird, beträgt 2^q. So ist beispielsweise bei einfachen Summen:

$$-\sum_0^{n-1}{}_s\, e^{\frac{\pi i}{n} c s^2 + \pi i s} = \sum_0^{n-1}{}_s\, e^{\frac{\pi i}{n} c s^2} - \sum_0^{n-1}{}_s\, e^{\frac{4 \pi i c}{n} s^2}.$$

Eine ganz ähnliche Behandlungsweise wie die hier betrachteten Summen *) gestatten die folgenden:

$$(7.)\qquad \sum_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(s_1+\frac{1}{2}\nu_1,\, s_2+\frac{1}{2}\nu_2,\, \dots s_p+\frac{1}{2}\nu_p)},$$

worin $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_p$ ganze Zahlen sind, für welche die Werthe 0 oder 1 gesetzt werden dürfen.

Ist zunächst wieder n ungerade, so erfordert die Voraussetzung, dass die Summe (7.) von der Wahl der Restsysteme unabhängig sei:

$$(8.)\qquad c_{1i}\nu_1+c_{2i}\nu_2+\dots+c_{pi}\nu_p+c_{ii} \equiv 0\,. \quad (\text{mod. } 2) \quad i=1,\, 2,\, \dots p.$$

Man kann dann immer Zahlensysteme $m_{\varkappa\lambda}$, $\gamma_{\varkappa\lambda}$ bestimmen, so dass:

$$(9.)\qquad c_{\varkappa\lambda} = m_{\varkappa\lambda}n+8\gamma_{\varkappa\lambda},$$

und mit Rücksicht hierauf und auf die Bedingung (8.) geht die Summe (7.) in folgende über:

$$(10.)\qquad e^{\frac{i\pi}{4}\sum\limits_{\varkappa}\sum\limits_{\lambda} m_{\varkappa\lambda}\nu_\varkappa\nu_\lambda} \sum_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{2\pi i}{n}\sum\limits_{\varkappa}\sum\limits_{\lambda}\gamma_{\varkappa\lambda}s_\varkappa s_\lambda},$$

da nämlich $s_\varkappa$ und $2s_\varkappa+1$ gleichzeitig vollständige Restsysteme nach dem Modul n durchlaufen. Die Summe (10.) lässt sich nach dem Früheren bestimmen.

Im Falle, wo n gerade ist, muss $c_{1i}\nu_1+c_{2i}\nu_2+\dots+c_{pi}\nu_p \equiv 0$ (mod. 2) sein. Es lässt sich alsdann die Summe (7.) in eine bestimmte Anzahl anderer Summen zerlegen, ebenso wie in dem oben behandelten Falle. Ist nämlich

$$\nu_1=\nu_2=\dots=\nu_q=1, \quad \nu_{q+1}=\dots=\nu_p=0,$$

so gelangt man auf einem dem obigen ganz entsprechenden Weg zu der Formel:

$$(11.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2^q}\sum\limits_{s_1, s_2, \dots s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(s_1+\frac{1}{2},\, s_2+\frac{1}{2},\, \dots s_q+\frac{1}{2},\, s_{q+1}, \dots s_p)} \\ = \mathsf{S}(-\tfrac{1}{2})^{(h_1-1)+(h_2-1)+\dots+(h_q-1)} \sum\limits_{s_1, s_2, \dots s_q} e^{\frac{\pi i}{4n} f(h_1 s_1,\, h_2 s_2, \dots h_q s_q,\, 2s_{q+1}, \dots 2s_p)}. \end{cases}$$

---

*) Einen besonderen Fall der diesen entsprechenden einfachen Summen hat Herr *Lebesgue* untersucht. (Sur le symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ et quelques-unes de ses applications. *Liouvilles* Journal Bd. 12.)

Auch hier bedeutet $\mathfrak{S}$ eine Summe, die sich auf alle Combinationen der Werthe 1, 2 für die $h_1, h_2, \ldots h_q$ bezieht. Die Summen nach $s_1, s_2, \ldots s_p$ erstrecken sich in der Formel (11.) auf vollständige Restsysteme nach dem Modul $2n$. Es ist also auch diese Summe ausgedrückt durch 2^q andere Summen, die sich nach den früher entwickelten Sätzen bestimmen lassen.

Zürich, im Mai 1871.

Ueber die unendlich vielen Formen der ϑ-Function.

(Von Herrn *H. Weber* in Zürich.)

Es ist meine Absicht, in der vorliegenden Arbeit eine Anwendung der Resultate mitzutheilen, die ich in meiner Abhandlung über die mehrfachen *Gauss*ischen Summen entwickelt habe; und zwar auf die Constantenbestimmung in der Theorie der unendlich vielen Formen der ϑ-Function.

Bereits *Jacobi*, der Schöpfer dieser ganzen Theorie, hat darauf hingewiesen, dass bei der elliptischen ϑ-Function die fragliche Constante mit Hülfe des *Legendre*schen Symbols $\left(\frac{a}{b}\right)$ aus der Theorie der quadratischen Reste bestimmt werden könne, und dass ein zweifacher Weg zu dieser Bestimmung führe, der eine durch eine Kettenbruchentwicklung, der andere durch die *Gauss*ischen Summen. Ausser einer kurzen Andeutung findet sich meines Wissens unter *Jacobis* veröffentlichten Werken Nichts über diesen Gegenstand *). Später wurde durch Herrn *Hermite* die Constantenbestimmung nach der letzteren Methode vollständig bis zu den einfachsten Resultaten durchgeführt **).

Die unendlich vielen Formen der ϑ-Functionen von mehreren Veränderlichen sind enthalten in einer Untersuchung des Herrn *Thomae* ***). Die Constantenbestimmung ist dort durch endliche Summen bewerkstelligt, deren wahre Natur jedoch erst durch Herstellung des Zusammenhangs mit den mehrfachen *Gauss*ischen Summen aufgedeckt würde.

---

*) Ueber die Differentialgleichung, welcher die Reihen $1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \cdots$, $2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \cdots$ genügen. Dieses Journal Bd. 36. Uebersetzt in *Liouvilles* Journal Bd. 14.

In seinen Vorlesungen hat *Jacobi* die erwähnten Gedanken durchgeführt, jedoch ist mir Näheres darüber nicht bekannt.

**) *Hermite, Liouvilles* Journal 1858.

Es findet sich dort in der Endformel ein kleiner Fehler. Wenn, wie auf Seite 29 l. c., gesetzt wird $b = 2^\alpha \beta$, wo β ungerade ist, so müssen die beiden Formeln für ein gerades und für ein ungerades α mit einander vertauscht werden. Dieser Irrthum ist auch in das Werk des Herrn *Königsberger* (die Transformation etc. der elliptischen Functionen, Leipzig 1868) übergegangen, woselbst noch in den Formeln für C und σ (pag. 24) im Exponenten das entgegengesetzte Zeichen stehen muss.

***) Die allgemeine Transformation der θ-Functionen etc. Inaugural-Dissertation, Göttingen 1864.

Ein anderer Weg zur Bestimmung der Constanten ist in dem Werke der Herren *Clebsch* und *Gordan* eingeschlagen *), wo gezeigt ist, wie eine jede in die Theorie der unendlich vielen Formen der ϑ-Function fallende Transformation zusammengesetzt werden kann aus einer endlichen Zahl einfacher Transformationen, für welche die Constante auf directem Wege gefunden wird. Es fordert also nach dieser Methode die Constantenbestimmung eine je nach der Natur der vorliegenden Transformation mehr oder weniger grosse Anzahl von Operationen.

In der vorliegenden Abhandlung ist nun gezeigt, wie die Aufgabe gelöst werden kann durch die Summation der mehrfachen *Gauss*ischen Reihen auf einem ganz ähnlichen Wege wie dem von Herrn *Hermite* eingeschlagenen.

Wenn es also auch nicht möglich ist, den Werth der Constanten in einer alle Fälle umfassenden allgemeinen Form hinzuschreiben, so ist doch der Weg angegeben, immer durch eine gewisse Anzahl von Operationen zum Ziel zu gelangen, welche höchstens mit der Anzahl der Veränderlichen, von der die ϑ-Function abhängt, wächst.

§. 1.

Wir definiren die allgemeine ϑ-Function durch die folgende Reihe:

$$(1.)\quad \begin{cases} \vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', & \varepsilon_2', & \dots & \varepsilon_p' \end{Bmatrix}(u_1, u_2, \dots u_p) \\ = (\sum_h)^p e^{\sum_\kappa^p \sum_\lambda^p a_{\kappa\lambda}(h_\kappa + \frac{1}{2}\varepsilon_\kappa)(h_\lambda + \frac{1}{2}\varepsilon_\lambda) + 2\sum_i (h_i + \frac{1}{2}\varepsilon_i)(u_i + \frac{1}{2}\varepsilon_i'\pi i)} \end{cases},$$

worin die $p$fache Summe sich auf alle positiven und negativen Werthe von h erstreckt. Die Grössen ε, ε' sind ganze Zahlen; die ϑ-Function ändert sich nicht, wenn die ε um beliebige gerade Zahlen wachsen, und erhält den Factor $(-1)^{\varepsilon_i}$, wenn ε_i' um 2 wächst. Beachtet man dies, so kann man ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit für ε, ε' die Zahlen 0, 1 annehmen. Die Grössen $a_{\kappa\lambda}$ sind an die einzige Beschränkung geknüpft, dass die Function

$$\sum_\kappa \sum_\lambda a_{\kappa\lambda} x_\kappa x_\lambda$$

für alle reellen Werthe der Veränderlichen x einen negativen reellen Theil hat, dass also auch für kein von Null verschiedenes reelles Werthsystem der x die Function rein imaginär werde.

---

*) Theorie der *Abel*schen Functionen. Leipzig 1866.

Es folgen aus (1.) die Periodeneigenschaften der ϑ-Function:

$$(2.)\quad \begin{cases} \vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, & \varepsilon'_2, & \dots & \varepsilon'_p\end{Bmatrix}(u_1, \dots u_h+\pi i, \dots u_p) \\ = (-1)^{\varepsilon_h}\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, & \varepsilon'_2, & \dots & \varepsilon'_p\end{Bmatrix}(u_1, \dots u_h, \dots u_p), \end{cases}$$

$$(3.)\quad \begin{cases} \vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, & \varepsilon'_2, & \dots & \varepsilon'_p\end{Bmatrix}(u_1+a_{1h}, \dots u_p+a_{ph}) \\ = (-1)^{\varepsilon'_h} e^{-2u_h-a_{hh}}\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, & \varepsilon'_2, & \dots & \varepsilon'_p\end{Bmatrix}(u_1, u_2, \dots u_p). \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen reichen ihrerseits wieder aus, um die ϑ-Function bis auf einen von den Variablen u unabhängigen Factor zu bestimmen. Diejenige ϑ-Function, in welcher die ε, ε' alle den Werth Null haben, soll kurz mit $\vartheta(u_1, u_2, \dots u_p)$ bezeichnet werden.

Ist es nothwendig, die Moduln $a_{\varkappa\lambda}$ der ϑ-Function in die Bezeichnung mit aufzunehmen, so setzen wir:

$$\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, & \dots & \varepsilon'_p\end{Bmatrix}(u_1, u_2, \dots u_p; a).$$

Wir betrachten nun die Function:

$$(4.)\quad \Pi(w_1, w_2, \dots w_p) = e^{f(w_1, w_2, \dots w_p)}\vartheta(w_1, w_2, \dots w_p; b),$$

worin f eine noch näher zu bestimmende Function zweiten Grades ist:

$$(4^a.)\quad f(w_1, w_2, \dots w_p) = \sum_\varkappa\sum_\lambda c_{\varkappa\lambda} w_\varkappa w_\lambda.$$

Wir führen in der Function Π statt der Veränderlichen w neue Veränderliche u ein durch ein System linearer Gleichungen:

$$(5.)\quad u_h = \alpha_1^{(h)} w_1 + \alpha_2^{(h)} w_2 + \dots + \alpha_p^{(h)} w_p,$$

$$(6.)\quad w_h = \beta_h^{(1)} u_1 + \beta_h^{(2)} u_2 + \dots + \beta_h^{(p)} u_p,$$

wo natürlich die Determinanten der Grössen α und β nicht verschwinden dürfen.

Die Aufgabe ist nun die, die verfügbaren Grössen $c_{\varkappa\lambda}$, $\alpha_h^{(k)}$, resp. $\beta_h^{(k)}$ so zu bestimmen, dass die Function Π in eine ϑ-Function der Grössen u übergeht, deren Moduln mit a_{hk} bezeichnet werden sollen.

Zur Lösung dieser Aufgabe wird man zunächst die Periodeneigenschaften (2.), (3.) zu berücksichtigen haben.

Lässt man u_μ um πi zunehmen, so wächst w_h um $\beta_h^{(\mu)}\pi i$. Da nun

durch diese Aenderung in der Function Π der Factor $\vartheta(w_1, w_2, \dots w_p)$ wieder auftreten muss, so hat man zu setzen:

$$(7.)\quad \beta_k^{(\mu)}\pi i = \varrho_k^{(\mu)}\pi i + \sigma_1^{(\mu)} b_{k1} + \sigma_2^{(\mu)} b_{k2} + \cdots + \sigma_p^{(\mu)} b_{kp},$$

worin die ϱ, σ ganze Zahlen sind. Unter dieser Voraussetzung erhält man die Gleichung:

$$(8.)\left\{\begin{aligned} &\Pi(w_1+\beta_1^{(\mu)}\pi i, \dots w_p+\beta_p^{(\mu)}\pi i) = \\ &(-1)^{\sum\limits_i \varrho_i^{(\mu)}\sigma_i^{(\mu)}}\,\Pi(w_1, \dots w_p)\, e^{\sum\limits_k w_k \pi i f'(\beta_k^{(\mu)}) + (\pi i)^2 f(\beta_1^{(\mu)}, \dots \beta_p^{(\mu)}) - 2\sum\limits_k \sigma_k^{(\mu)} w_k - \sum\limits_k \sigma_k^{(\mu)}\beta_k^{(\mu)}\pi i}. \end{aligned}\right.$$

Da sich nun die Function Π nicht anders als im Vorzeichen ändern soll, so muss man setzen:

$$(9.)\quad 2\sigma_k^{(\mu)} = \pi i f'(\beta_k^{(\mu)}),$$

woraus folgt:

$$\pi i \sum_k \sigma_k^{(\mu)}\beta_k^{(\mu)} = (\pi i)^2 f(\beta_1^{(\mu)}, \beta_2^{(\mu)}, \dots \beta_p^{(\mu)}),$$

und danach folgt aus (8.):

$$(10.)\quad \Pi(w_1+\beta_1^{(\mu)}\pi i, \dots w_p+\beta_p^{(\mu)}\pi i) = (-1)^{\sum\limits_i \varrho_i^{(\mu)}\sigma_i^{(\mu)}}\,\Pi(w_1, w_2, \dots w_p).$$

Lässt man ferner die neuen Variablen $u_1, u_2, \dots u_p$ respective um $a_{1\mu}$, $a_{2\mu}, \dots a_{p\mu}$ wachsen, so wächst w_k um:

$$\beta_k^{(1)} a_{1\mu} + \beta_k^{(2)} a_{2\mu} + \cdots + \beta_k^{(p)} a_{p\mu},$$

und dieser Ausdruck muss aus denselben Gründen wie oben gleich sein:

$$(11.)\quad r_k^{(\mu)}\pi i + s_1^{(\mu)} b_{k1} + s_2^{(\mu)} b_{k2} + \cdots + s_p^{(\mu)} b_{kp} = k_k^{(\mu)},$$

worin r und s wieder ganze Zahlen bedeuten. Es ist also die weitere Relation zu befriedigen:

$$(11'.)\quad k_k^{(\mu)} = \beta_k^{(1)} a_{1\mu} + \beta_k^{(2)} a_{2\mu} + \cdots + \beta_k^{(p)} a_{p\mu}.$$

Man erhält dann:

$$(12.)\left\{\begin{aligned} &\Pi(w_1+k_1^{(\mu)}, \dots w_p+k_p^{(\mu)}) = (-1)^{\sum\limits_k s_k^{(\mu)} r_k^{(\mu)}}\,\Pi(w_1, w_2, \dots w_p) \times \\ &e^{\sum\limits_k w_k (f'(k_k^{(\mu)}) - 2s_k^{(\mu)}) + f(k_1^{(\mu)}, k_2^{(\mu)}, \dots k_p^{(\mu)}) - \sum s_k^{(\mu)} k_k^{(\mu)}}. \end{aligned}\right.$$

Wir werden unsern Zweck erreichen, wenn wir setzen:

$$(13.)\quad s_k^{(\mu)} - \tfrac{1}{2} f'(k_k^{(\mu)}) = \alpha_k^{(\mu)}.$$

Denn daraus folgt:

$$\sum_k s_k^{(\mu)} k_k^{(\mu)} - f(k_1^{(\mu)}, k_2^{(\mu)}, \dots k_p^{(\mu)}) = a_{\mu\mu},$$

und demnach geht die Gleichung (12.) in folgende über:

$$(12'.)\quad \Pi(w_1+k_1^{(\mu)}, w_2+k_2^{(\mu)}, \dots w_p+k_p^{(\mu)}) = (-1)^{\sum\limits_h r_h^{(\mu)} s_h^{(\mu)}} e^{-2u-a_{\mu\mu}} \Pi(w_1, w_2, \dots w_p).$$

Die in (10.) und (12'.) ausgedrückten Periodeneigenschaften definiren bis auf einen constanten Factor eine ϑ-Function, so dass man erhält:

$$(14.)\quad \Pi(w_1, w_2, \dots w_p) = T\vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', & \varepsilon_2', & \dots & \varepsilon_p' \end{Bmatrix}(u_1, u_2, \dots u_p; a),$$

wenn T eine Constante bedeutet, und

$$(15.)\quad \begin{cases} \varepsilon_\mu = \sum\limits_h \varrho_h^{(\mu)} \sigma_h^{(\mu)}, \\ \varepsilon_\mu' = \sum\limits_h r_h^{(\mu)} s_h^{(\mu)} \end{cases}$$

gesetzt wird *). Es ist nur noch die Frage, in wie weit die gestellten Bedingungen (9.), (11'.), (13.) erfüllt werden können.

Die Gleichung (9.) lautet entwickelt:

$$\sigma_h^{(\mu)} = \pi i (c_{h1}\beta_1^{(\mu)} + c_{h2}\beta_2^{(\mu)} + \dots + c_{hp}\beta_p^{(\mu)}),$$

und durch Auflösung dieses Systems ergiebt sich:

$$(16.)\quad c_{hk} = \frac{1}{\pi i}(\sigma_h^{(1)}\alpha_k^{(1)} + \sigma_h^{(2)}\alpha_k^{(2)} + \dots + \sigma_h^{(p)}\alpha_k^{(p)}),$$

woraus folgt:

$$(17.)\quad 0 = \sum_i (\sigma_h^{(i)}\alpha_k^{(i)} - \sigma_k^{(i)}\alpha_h^{(i)}).$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich leicht:

$$\sum_h (\sigma_h^{(\lambda)}\beta_h^{(\mu)} - \beta_h^{(\lambda)}\sigma_h^{(\mu)}) = 0,$$

und wenn man die Werthe (7.) von β substituirt, so folgen die Gleichungen zwischen den ganzen Zahlen ϱ, σ:

$$(18.)\quad \sum_i (\varrho_i^{(\lambda)}\sigma_i^{(\mu)} - \sigma_i^{(\lambda)}\varrho_i^{(\mu)}) = 0.$$

Umgekehrt folgen hieraus die Gleichungen (17.), da die Determinante der β nicht verschwinden darf, und durch (16.) sind dann die Coefficienten der Function f bestimmt.

Die Gleichung (13.) geht, wenn man dieselbe mit $\beta_h^{(\nu)}$ multiplicirt und nach h summirt, mit Berücksichtigung von (9.) in folgende über:

$$\sum_h (\pi i \beta_h^{(\nu)} s_h^{(\mu)} - k_h^{(\mu)}\sigma_h^{(\nu)}) = 0 \quad \text{oder} \quad = \pi i,$$

*) Da für die Werthe 0 der Argumente die ϑ-Function rechts nicht verschwinden kann, so muss $\sum \varepsilon_i \varepsilon_i'$ eine gerade Zahl sein, was sich leicht mittelst der weiter unten aufzustellenden Relationen zwischen den Zahlen ϱ, σ, r, s direct verificiren lässt.

je nachdem μ, ν verschieden oder gleich sind. Substituirt man darin die Werthe von $\beta_h^{(\nu)}$, $k_h^{(\mu)}$ aus (7.) und (11.), so folgt

$$(19.)\qquad \sum_h (\varrho_h^{(\nu)} s_h^{(\mu)} - r_h^{(\mu)} \sigma_h^{(\nu)}) = 0 \quad \text{oder} \quad = 1,$$

je nachdem μ, ν verschieden oder gleich sind. Umgekehrt ist auch (13.) wieder eine Folge von (19.).

Es bleiben also nur noch die Moduln $a_{\mu\nu}$ der neuen ϑ-Function zu bestimmen. Für diese erhält man aus (11'.):

$$(20.)\qquad a_{\nu\mu} = \sum_h \alpha_h^{(\nu)} k_h^{(\mu)},$$

und aus der Gleichung $a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}$ folgt dann:

$$(21.)\qquad \sum_h (\alpha_h^{(\nu)} k_h^{(\mu)} - \alpha_h^{(\mu)} k_h^{(\nu)}) = 0,$$

woraus mit Berücksichtigung von (13.) und (11.) hervorgeht:

$$(22.)\qquad \sum_h (s_h^{(\nu)} r_h^{(\mu)} - r_h^{(\nu)} s_h^{(\mu)}) = 0,$$

eine Gleichung, welche wiederum (21.) zur Folge hat.

Alle Bedingungen unserer Aufgabe sind demnach zurückgeführt auf die Bedingungen (18.), (19.), (22.) zwischen den $(2p)^2$ ganzen Zahlen ϱ, σ, r, s. Die aus den Grössen σ, ϱ, s, r gebildete Determinante

$$S = \begin{vmatrix} \sigma_1^{(1)} & \dots & \sigma_1^{(p)} & s_1^{(1)} & \dots & s_1^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_p^{(1)} & \dots & \sigma_p^{(p)} & s_p^{(1)} & \dots & s_p^{(p)} \\ \varrho_1^{(1)} & \dots & \varrho_1^{(p)} & r_1^{(1)} & \dots & r_1^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_p^{(1)} & \dots & \varrho_p^{(p)} & r_p^{(1)} & \dots & r_p^{(p)} \end{vmatrix}$$

hat in Folge der Relationen (18.), (19.), (22.) den Werth ± 1. Man schliesst dies daraus, dass jedes System von $2p$ linearen Gleichungen, deren Coefficienten die Determinante S bilden, durch Anwendung der Relationen (18.), (19.), (22.) Auflösungen ohne Nenner liefern.

Dies wäre nur dann möglich, wenn sämmtliche Unterdeterminanten von S durch S theilbar wären, dann aber müsste die Determinante der Unterdeterminanten, die gleich S^{2p-1} ist, durch S^{2p} theilbar sein, woraus die Richtigkeit der obigen Behauptung folgt.

Die Anwendung dieser Eigenschaft der Determinante S führt leicht zu einer zweiten Form der Gleichungen (18.), (19.), (22.):

$$(23.)\quad \begin{cases} \sum_i (s_\mu^{(i)}\sigma_\nu^{(i)} - s_\nu^{(i)}\sigma_\mu^{(i)}) = 0, \\ \sum_i (r_\mu^{(i)}\varrho_\nu^{(i)} - r_\nu^{(i)}\varrho_\mu^{(i)}) = 0, \\ \sum_i (s_\mu^{(i)}\varrho_\nu^{(i)} - r_\nu^{(i)}\sigma_\mu^{(i)}) = 0 \quad \mu \gtrless \nu, \\ \sum_i (s_\mu^{(i)}\varrho_\mu^{(i)} - r_\mu^{(i)}\sigma_\mu^{(i)}) = 1\,^{*}). \end{cases}$$

Wegen des späteren Gebrauchs fügen wir noch eine andere Form der Gleichung (13.) bei, die sich mit Rücksicht auf die Bedeutung der Function f und der Grössen $k_h^{(\mu)}$ (13.), (11'.) sofort ergiebt:

$$(24.)\qquad \pi i a_h^{(k)} = \pi i s_h^{(k)} - \sum_i \sigma_h^{(i)} a_{ik}.$$

Man erhält endlich leicht aus den Gleichungen (11.), (11'.), indem man für β die Werthe (7.) setzt, die Formel:

$$r_h^{(\mu)}\pi i + \sum_i s_i^{(\mu)} b_{hi} = \sum_i \varrho_h^{(i)} a_{i\mu} + \frac{1}{\pi i}\sum_i\sum_k \sigma_k^{(i)} b_{hk} a_{\mu i},$$

welche mit einer von Herrn *Kronecker* a. a. O. mitgetheilten Formel des Herrn *Weierstrass* übereinstimmt, aus der, wie alsbald gezeigt werden wird, sowohl die Grössen a durch die b als auch umgekehrt eindeutig bestimmt sind.

§. 2.

Um vollständig sicher zu sein, dass die zwischen den Zahlen ϱ, σ, r, s, aufgestellten Relationen genügen, ist noch zu zeigen, dass die Determinante der Grössen β, die durch (7.) definirt sind, nicht verschwinden kann, und dass auch die neuen Moduln $a_{\varkappa\lambda}$ der Convergenzbedingung der ϑ-Function genügen. Ersteres lässt sich folgendermassen beweisen.

Man setze, indem man die Grössen $b_{\varkappa\lambda}$ in ihre reellen und imaginären Theile sondert:

$$\sum b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda = \varphi_1(x_1, x_2, \dots x_p) + i\varphi_2(x_1, x_2, \dots x_p),$$

und nach der Voraussetzung kann φ_1 für kein von Null verschiedenes reelles Werthsystem der $x_1, x_2, \dots x_p$ Null oder positiv werden.

Wenn nun die Determinante der β Null wäre, so liesse sich ein von Null verschiedenes Grössensystem $l_\mu + m_\mu i$ bestimmen, welches den Gleichungen genügt:

$$\sum_\mu \beta_h^{(\mu)}(l_\mu + m_\mu i) = 0.$$

---

*) Ueber den Beweis der Existenz dieser Zahlsysteme und die Bestimmungsweise derselben vgl. *Clebsch* und *Gordan*, Theorie der *Abel*schen Functionen. *Kronecker*, „Ueber bilineare Formen" Monatsbericht der Berliner Akademie vom 15. Oct. 1866, dieses Journal Bd. 68.

Setzt man hier die Werthe von $\beta_h^{(\mu)}$ aus (7.) §. 1 ein und trennt das Reelle vom Imaginären, so ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$(25.)\quad \begin{cases} 0 = \pi\sum_\mu \varrho_h^{(\mu)} l_\mu + \tfrac{1}{2}\varphi_1'(\sum_\mu \sigma_h^{(\mu)} m_\mu) + \tfrac{1}{2}\varphi_2'(\sum_\mu \sigma_h^{(\mu)} l_\mu), \\ 0 = -\pi\sum_\mu \varrho_h^{(\mu)} m_\mu + \tfrac{1}{2}\varphi_1'(\sum_\mu \sigma_h^{(\mu)} l_\mu) - \tfrac{1}{2}\varphi_2'(\sum_\mu \sigma_h^{(\mu)} m_\mu). \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\sum_\nu \sigma_h^{(\nu)} m_\nu$, $\sum_\nu \sigma_h^{(\nu)} l_\nu$ und summirt in Bezug auf h, so folgt wegen (18.):

$$(26.)\quad \varphi_1(\sum_\mu \sigma_1^{(\mu)} m_\mu, \dots \sum_\mu \sigma_p^{(\mu)} m_\mu) + \varphi_1(\sum_\mu \sigma_1^{(\mu)} l_\mu, \dots \sum_\mu \sigma_p^{(\mu)} l_\mu) = 0.$$

Diese Gleichung kann aber, in Folge der über φ_1 gemachten Voraussetzung, nicht anders bestehen, als wenn

$$\sum_\mu \sigma_h^{(\mu)} m_\mu, \qquad \sum_\mu \sigma_h^{(\mu)} l_\mu$$

für $h = 1, 2, \dots p$ verschwinden, so dass aus (25.) folgt, dass auch:

$$\sum_\mu \varrho_h^{(\mu)} m_\mu, \qquad \sum_\mu \varrho_h^{(\mu)} l_\mu$$

verschwinden müssen. Das aber widerspricht der Bedingung $S = \pm 1$, denn unter diesen Voraussetzungen würde S verschwinden müssen.

Es kann also kein den gestellten Bedingungen genügendes Zahlensystem ϱ, σ nach (7.) ein System Coefficienten β liefern, dessen Determinante verschwindet. Daraus folgt auch die oben behauptete eindeutige Bestimmbarkeit der Grössen $a_{\varkappa\lambda}$ durch die $b_{\varkappa\lambda}$.

Es ist ferner der Nachweis zu führen, dass die Function

$$\psi_1 + i\psi_2 = \sum_{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

für alle reellen Werthe der x einen negativen reellen Theil hat, der für kein von Null verschiedenes Werthsystem verschwindet, wenn die Grössen $a_{\varkappa\lambda}$ den obigen Bedingungen gemäss bestimmt sind.

Man bestimme zu diesem Ende ein complexes Grössensystem $y_1, y_2, \dots y_p$ aus den Gleichungen:

$$(27.)\quad x_i = \sum_h \beta_h^{(i)} y_h.$$

Aus der Definition der Grössen $k_h^{(\mu)}$ in (11'.) ergiebt sich dann leicht die Gleichung:

$$(28.)\quad \psi_1(x_1, x_2, \dots x_p) + i\psi_2(x_1, x_2, \dots x_p) = \sum_h \sum_\mu k_h^{(\mu)} y_h x_\mu.$$

Setzt man hierin:

$$\begin{aligned} y_h &= y_h' + i y_h'', \\ \beta_h^{(i)} &= \beta_h^{(i)\prime} + i\beta_h^{(i)\prime\prime}, \\ k_h^{(i)} &= k_h^{(i)\prime} + i k_h^{(i)\prime\prime}, \quad b_{hk} = b_{hk}' + i b_{hk}'', \end{aligned}$$

so folgt aus (27.)

$$(29.)\quad \begin{cases} x_i = \sum_h (\beta_h^{(i)\prime} y_h' - \beta_h^{(i)\prime\prime} y_h''), \\ 0 = \sum_h (\beta_h^{(i)\prime} y_h'' + \beta_h^{(i)\prime\prime} y_h'), \end{cases}$$

$$(30.)\quad \begin{cases} \beta_i^{(\mu)\prime} = \varrho_i^{(\mu)} + \frac{1}{\pi} \sum_l \sigma_l^{(\mu)} b_{il}'', \\ \beta_i^{(\mu)\prime\prime} = \qquad -\frac{1}{\pi} \sum_l \sigma_l^{(\mu)} b_{il}', \\ k_i^{(\mu)\prime} = \qquad \sum_l b_{il}' s_l^{(\mu)}, \\ k_i^{(\mu)\prime\prime} = r_i^{(\mu)} \pi + \sum_l b_{il}'' s_l^{(\mu)}, \end{cases}$$

woraus leicht die Relationen hervorgehen:

$$(31.)\quad \begin{cases} \sum_\mu (k_i^{(\mu)\prime} \beta_h^{(\mu)\prime\prime} - k_h^{(\mu)\prime} \beta_i^{(\mu)\prime\prime}) = 0, \\ \sum_\mu (k_i^{(\mu)\prime\prime} \beta_h^{(\mu)\prime} - k_h^{(\mu)\prime\prime} \beta_i^{(\mu)\prime}) = 0, \\ \sum_\mu (k_i^{(\mu)\prime\prime} \beta_h^{(\mu)\prime\prime} + k_h^{(\mu)\prime} \beta_i^{(\mu)\prime}) = b_{hi}'. \end{cases}$$

Die Gleichung (28.) liefert nun durch Trennung des Reellen und Imaginären mit Hülfe von (29.)

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots x_p) = \sum_h \sum_\mu \sum_i \{k_h^{(\mu)\prime} \beta_i^{(\mu)\prime} y_h' y_i' + k_h^{(\mu)\prime\prime} \beta_i^{(\mu)\prime\prime} y_h'' y_i'' \\ - k_h^{(\mu)\prime} \beta_i^{(\mu)\prime\prime} y_h' y_i'' - k_h^{(\mu)\prime\prime} \beta_i^{(\mu)\prime} y_h'' y_i'\}.$$

Diese Gleichung aber geht mit Benutzung von (31.), (29.), (30.) über in folgende:

$$(32.)\quad \psi_1(x_1, x_2, \dots x_p) = \sum_h \sum_i b_{hi}'(y_h' y_i' + y_h'' y_i'') = \varphi_1(y_1', y_2', \dots y_p') + \varphi_1(y_1'', y_2'', \dots y_p'').$$

Damit ist der Beweis geführt; denn in Folge der über φ_1 gemachten Voraussetzung kann die rechte Seite niemals positiv werden noch auch Null, es sei denn dass sämmtliche y', y'' und mithin sämmtliche x verschwinden.

Ich schliesse hier den Beweis eines Satzes über die Function f an, von der später Gebrauch zu machen ist. Die Function

$$f(w_1, w_2, \dots w_p) = \sum_\varkappa \sum_\lambda c_{\varkappa\lambda} w_\varkappa w_\lambda$$

möge durch die Substitutionen:

$$(33.)\quad w_i = \sum_h \beta_i^{(h)} u_h$$

übergehen in:

$$(33^a.)\quad F(u_1, u_2, \dots u_p) = \sum_\varkappa \sum_\lambda C_{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda.$$

Mit Rücksicht auf (16.) und (7.) §. 1 erhält man:

$$(34.)\quad C_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{\pi i} \sum_i \sigma_i^{(\varkappa)} \varrho_i^{(\lambda)} + \frac{1}{(\pi i)^2} \sum_i \sum_h b_{ih} \sigma_i^{(\varkappa)} \sigma_h^{(\lambda)} = \frac{1}{\pi i} \sum_i \sigma_i^{(\varkappa)} \beta_i^{(\lambda)}$$

und folglich

$$(35.)\quad F(u_1, u_2, \dots u_p) = \frac{1}{\pi i}\sum_i\sum_\varkappa\sum_\lambda \sigma_i^{(\varkappa)} u_\varkappa \varrho_i^{(\lambda)} u_\lambda + \frac{1}{(\pi i)^2}\sum_i\sum_h b_{ih} \sum_\varkappa \sigma_i^{(\varkappa)} u_\varkappa \sum_\lambda \sigma_i^{(\lambda)} u_\lambda .$$

Daraus geht hervor, dass für reelle Werthe von $u_1, u_2, \dots u_p$ die Function F einen wesentlich positiven reellen Theil besitzt, dass derselbe aber für ein von Null verschiedenes reelles Werthsystem der u verschwinden kann, falls die Determinante

$$\delta = \Sigma \pm \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(2)} \dots \sigma_p^{(p)}$$

verschwindet, aber auch nur unter dieser Voraussetzung.

Auf dieselbe Weise lässt sich mit Hülfe der Formeln (16.), (24.) zeigen, dass die Function $f(w_1, w_2, \dots w_p)$ für reelle Werthe von w einen reellen Theil besitzt von gleichem Zeichen wie der der Function $\sum_\varkappa\sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} w_\varkappa w_\lambda$, woraus dann folgt, dass die Functionen $f(w_1, w_2, \dots w_p)$ und $F(u_1, u_2, \dots u_p)$ für reelle Werthe resp. der w und der u reelle Theile von entgegengesetzten Vorzeichen haben.

§. 3.

Die Schwierigkeit besteht nun in der Bestimmung der Constanten T in der Gleichung (14.) §. 1. Setzt man zu diesem Ende in (14.) für die ϑ-Functionen die unendlichen Reihen ein, ersetzt $u_1, u_2, \dots u_p$ durch $iu_1, iu_2, \dots iu_p$ und dem entsprechend $w_1, w_2, \dots w_p$ durch $iw_1, iw_2, \dots iw_p$, so lässt sich der Gleichung folgende Form geben:

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{h_1, h_2, \dots h_p}{}_{-\infty}^{+\infty} e^{\psi(u_1, u_2, \dots u_p;\, h_1, h_2, \dots h_p)} \\ &= T \sum_{h_1, h_2, \dots h_p}{}_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{\sum\limits_i \varepsilon_i' h_i} \cdot e^{\sum\limits_\varkappa\sum\limits_\lambda a_{\varkappa\lambda}(h_\varkappa + \frac{1}{2}\varepsilon_\varkappa)(h_\lambda + \frac{1}{2}\varepsilon_\lambda) + 2i\sum\limits_i h_i u_i}, \end{aligned}\right.$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi = -f(w_1, w_2, \dots w_p) + \varphi(h_1, h_2, \dots h_p) + 2i\sum_i h_i w_i - i\sum_i \varepsilon_i(u_i + \tfrac{1}{2}\varepsilon_i'\pi), \\ &\qquad\qquad \varphi(h_1, h_2, \dots h_p) = \sum_\varkappa\sum_\lambda b_{\varkappa\lambda} h_\varkappa h_\lambda, \end{aligned}\right.$$

wenn man die w nach den Formeln (6.) §. 1 durch die u ausdrückt. Dadurch geht ψ über in:

$$(3.)\quad \psi = -F(u_1, u_2, \dots u_p) + \varphi(h_1, h_2, \dots h_p) + i\sum_i u_i(2\sum_\varkappa h_\varkappa \beta_\varkappa^{(i)} - \varepsilon_i) - i\pi\sum_i \tfrac{1}{2}\varepsilon_i\varepsilon_i'.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\psi' = \psi(u_1 + m_1\pi, u_2 + m_2\pi, \dots u_p + m_p\pi, h_1, h_2, \dots h_p),$$
$$\psi'' = \psi(u_1, u_2, \dots u_p, h_1 + l_1, h_2 + l_2, \dots h_p + l_p),$$

worin:

$$(4.)\quad l_k = \sum_i m_i \sigma_k^{(i)}$$

und die Grössen m beliebige ganze Zahlen sind, so ergiebt eine leichte Rechnung, dass ψ'' sich von ψ' nur durch ein Vielfaches von $2\pi i$ unterscheidet, also:

$$(5.)\quad \psi' - \psi'' = 2L\pi i,$$

wenn L eine ganze Zahl bedeutet.

Es soll von nun an zuerst die Annahme gemacht werden, dass die Determinante

$$(6.)\quad \delta = \Sigma \pm \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(2)} \dots \sigma_p^{(p)}$$

nicht verschwinde.

Integrirt man dann die Gleichung (1.) nach allen u zwischen den Grenzen 0 und π, so fallen rechts alle Glieder heraus, in denen nicht sämmtliche h gleich Null sind, und man erhält:

$$(7.)\quad Te^{\sum\limits_\varkappa \sum\limits_\lambda a_{\varkappa\lambda} \cdot \frac{1}{4} \varepsilon_\varkappa \varepsilon_\lambda} \pi^p = \sum_{h_1, h_2, \dots h_p}\!\!{}^{+\infty}_{-\infty} \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^\pi e^\psi du_1 du_2 \dots du_p.$$

Setzt man nun in der Summe der rechten Seite:

$$(8.)\quad h_i = \sum_k m_k \sigma_i^{(k)} + \lambda_i,$$

so erhält man, wie weiter unten gezeigt werden soll (§. 6), alle möglichen Zahlensysteme $h_1, h_2, \dots h_p$ und jedes genau $(\delta)^{p-1}$ Mal, wenn man die $m_1, m_2, \dots m_p$ alle Zahlenwerthe von $-\infty$ bis $+\infty$, und die $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ von einander unabhängig je ein vollständiges Restsystem nach dem Modul δ durchlaufen lässt und unter (δ) den positiven Werth der Determinante δ versteht. Die Anwendung der Gleichung (5.) auf (7.) ergiebt demnach:

$$(9.)\quad \begin{cases} T\pi^p e^{\frac{1}{4}\sum\limits_\varkappa \sum\limits_\lambda a_{\varkappa\lambda} \varepsilon_\varkappa \varepsilon_\lambda} \\ = \dfrac{1}{(\delta)^{p-1}} \sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\psi(u_1, u_2, \dots u_p, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p)} du_1 du_2 \dots du_p, \end{cases}$$

eine Gleichung, die wegen der im vorigen Paragraphen bewiesenen Eigenschaft der Function $F(u_1, u_2, \dots u_p)$ statthaft ist, in welcher sich die Summen nach den $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ je auf ein beliebiges vollständiges Restsystem nach dem Modul δ erstrecken.

Die in (9.) vorkommenden Integrale können nun ausgeführt werden mittelst eines Satzes aus der Theorie der bestimmten Integrale.

Es sei:

$$(10.)\quad \chi(x_1, x_2, \dots x_p) = \sum_{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

eine Function, welche für reelle Werthe der Veränderlichen x einen positiven reellen Theil hat, der für kein von Null verschiedenes Werthsystem der x verschwindet. Man hat dann:

$$(11.)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\chi(x_1,x_2,\dots x_p)-2\sum_i x_i m_i}\,dx_1\,dx_2\dots dx_p = \frac{\pi^{\frac{1}{2}p}}{\sqrt{D}}\,e^{\sum_i m_i n_i},$$

wenn man die Grössen n_i durch Auflösung der linearen Gleichungen bestimmt:

$$(12.)\quad \tfrac{1}{2}\chi'(n_i) = m_i.$$

Es bedeutet darin D die Determinante der Function χ, also:

$$D = \Sigma\pm\alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{pp}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel wird auf folgende Art bestimmt:

Man setze:

$$D_1=\alpha_{11},\quad D_2=\Sigma\pm\alpha_{11}\alpha_{22},\quad \dots\quad D_h=\Sigma\pm\alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{hh},\quad\dots\quad D_p=D;$$

dann muss in der Formel (11.) gesetzt werden:

$$(13.)\quad \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{D_1}}\cdot\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\cdot\sqrt{\frac{D_2}{D_3}}\cdot\dots\cdot\sqrt{\frac{D_{p-1}}{D_p}},$$

wo rechts die Wurzeln alle so zu nehmen sind, dass die reellen Theile positiv werden. Diese Bestimmung des Vorzeichens ist unter allen Umständen völlig unzweideutig; denn nach den über χ gemachten Voraussetzungen kann keine der Grössen D_1, D_2, ... D_p verschwinden, und keine der Grössen $\frac{1}{D_1}$, $\frac{D_1}{D_2}$, ... $\frac{D_{p-1}}{D_p}$ reell und negativ sein.

Diesen Satz kann man nun anwenden auf die Formel (9.), wodurch man folgenden Ausdruck für die Constante T erhält:

$$(14.)\quad T=\frac{\pi^{-\frac{1}{2}p}}{\sqrt{\varDelta}\,(\delta)^{p-1}}\,e^{-\frac{1}{4}\sum_\varkappa\sum_\lambda a_{\varkappa\lambda}\varepsilon_\varkappa\varepsilon_\lambda-\frac{1}{2}\pi i\sum_h\varepsilon_h\varepsilon'_h}\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_p} e^{\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_p)-\sum_i n_i(\sum_k\lambda_k\beta_k^{(i)}-\frac{1}{2}\varepsilon_i)},$$

worin das Vorzeichen zu bestimmen ist mittelst der Gleichung:

$$(15.)\quad \frac{1}{\sqrt{\varDelta}} = \frac{1}{\sqrt{\varDelta_1}}\cdot\sqrt{\frac{\varDelta_1}{\varDelta_2}}\cdot\sqrt{\frac{\varDelta_2}{\varDelta_3}}\cdot\dots\cdot\sqrt{\frac{\varDelta_{p-1}}{\varDelta_p}},$$

wenn die reellen Theile der Wurzeln auf der rechten Seite positiv genommen werden, und gesetzt ist:

$$(16.)\quad \varDelta_1=C_{11},\quad \varDelta_2=\Sigma\pm C_{11}C_{22},\quad \varDelta_h=\Sigma\pm C_{11}C_{22}\dots C_{hh},\quad \varDelta_p=\varDelta=\Sigma\pm C_{11}C_{22}\dots C_{pp}.$$

Die Grössen $C_{\varkappa\lambda}$ sind in (34.) §. 2 angegeben. Endlich hat man noch die Coefficienten n_i zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}F'(n_i) = \sum_k\lambda_k\beta_k^{(i)}-\tfrac{1}{2}\varepsilon_i$$

---

oder entwickelt:

$$(17.)\qquad \sum_h \sum_k \beta_k^{(i)} \sigma_k^{(h)} n_h = \pi i \sum_k \lambda_k \beta_k^{(i)} - \tfrac{1}{2}\pi i \varepsilon_i.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergiebt:

$$(18.)\qquad n_k = \frac{\pi i}{\delta}\Big(\sum_l \lambda_l \delta_l^{(k)} - \tfrac{1}{2}\sum_l \sum_i \alpha_l^{(i)} \varepsilon_i \delta_l^{(k)}\Big),$$

wo die Grössen $\delta_l^{(k)}$ die Unterdeterminanten von δ sind. Substituirt man diese Ausdrücke in (14.), so folgt mit Benutzung der Relation:

$$(19.)\qquad \sum_k \beta_i^{(k)} \delta_l^{(k)} = \sum_k \beta_l^{(k)} \delta_i^{(k)},$$

die sich aus (17.) §. 1 ergiebt:

$$(20.)\qquad \begin{cases} T = \dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}\sum_i \varepsilon_i \varepsilon_i'}}{\pi^{\frac{1}{2}p}\sqrt{\Delta}.(\delta)^{p-1}} e^{-\frac{\pi i}{4\delta}\sum_\varkappa \sum_\lambda \sum_i \delta_i^{(\varkappa)} s_i^{(\lambda)} \varepsilon_\varkappa \varepsilon_\lambda} \\ \times \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p} e^{-\frac{\pi i}{\delta}\sum_\mu \sum_\nu \sum_h \delta_\mu^{(h)} \varrho_\nu^{(h)} \lambda_\mu \lambda_\nu + \frac{\pi i}{\delta}\sum_k \sum_i \lambda_k \delta_k^{(i)} \varepsilon_i}. \end{cases}$$

Es haben wie in (14.), auch hier die $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ je ein vollständiges Restsystem nach dem Modul δ zu durchlaufen.

Die in (20.) vorkommende Summe lässt sich nun zunächst für den Fall eines ungeraden δ auf die Form der Summen bringen, die ich in meiner Abhandlung „über die mehrfachen *Gauss*ischen Summen" behandelt habe.

Man schliesst leicht aus der identischen Gleichung:

$$\delta \sum_k \delta_i^{(k)} \varrho_i^{(k)} = \sum_k \sum_l \sum_h \delta_i^{(k)} \delta_i^{(l)} \varrho_h^{(k)} \sigma_h^{(l)}$$

auf die Congruenz:

$$\delta \sum_k \delta_i^{(k)} \varrho_i^{(k)} - \sum_k \delta_i^{(k)} \varepsilon_k \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2)$$

und daraus unter der Voraussetzung eines ungeraden δ:

$$(21.)\qquad \varepsilon_k \equiv \sum_i \sum_h \varrho_i^{(h)} \delta_i^{(h)} \sigma_i^{(k)} \qquad (\text{mod. } 2).$$

In der Formel (20.) dürfen nun für die ε die Werthe auf der rechten Seite der Congruenz (21.) gesetzt werden.

Macht man diese Substitution in (20.), so ergiebt sich:

$$(22.)\qquad \begin{cases} T = \dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}\sum_i \varepsilon_i \varepsilon_i'}}{\pi^{\frac{1}{2}p}\sqrt{\Delta}(\delta)^{p-1}} e^{-\frac{1}{4}\pi i \sum_h \sum_k \sum_l \delta_l^{(h)} \varrho_l^{(h)} s_l^{(k)} \varepsilon_k} \\ \times \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p} e^{-\frac{\pi i}{\delta}\sum_\mu \sum_\nu \sum_h \delta_\mu^{(h)} \varrho_\nu^{(h)} \lambda_\mu \lambda_\nu + \pi i \sum_\nu \sum_h \varrho_\nu^{(h)} \delta_\nu^{(h)} \lambda_\nu}. \end{cases}$$

Da nun nach der Voraussetzung δ ungerade ist, so lassen sich immer zwei Zahlensysteme $m_{\varkappa\lambda}$, $\gamma_{\varkappa\lambda}$ bestimmen, so dass:

$$(23.)\quad \begin{cases} \sum_h \delta_\varkappa^{(h)} \varrho_\lambda^{(h)} = m_{\varkappa\lambda}\delta - 2\gamma_{\varkappa\lambda}, \\ m_{\varkappa\lambda} = m_{\lambda\varkappa}, \quad \gamma_{\varkappa\lambda} = \gamma_{\lambda\varkappa}. \end{cases}$$

Substituirt man dies in (22.) und beachtet, dass

$$\sum_k \sum_i m_{ki} \lambda_k \lambda_i - \delta \sum_i m_{ii} \lambda_i$$

immer eine gerade Zahl ist, so nimmt (22.) folgende Form an:

$$(24.)\quad \begin{cases} T = \dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}\sum_i \varepsilon_i \varepsilon_i'}}{\pi^{\frac{1}{2}p}\sqrt{\Delta}(\delta)^{p-1}} e^{-\frac{1}{4}\pi i \sum_h \sum_k \sum_l \delta_l^{(h)} \varrho_l^{(h)} s_l^{(k)} \varepsilon_\varkappa} \\ \times \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p} e^{\frac{2\pi i}{\delta} \sum_k \sum_i \gamma_{ki} \lambda_k \lambda_i}, \end{cases}$$

worin jedoch zu setzen ist:

$$(25.)\quad \varepsilon_i = \text{ oder } \equiv \sum_h \sum_k \varrho_h^{(k)} \delta_h^{(k)} \sigma_h^{(i)} \qquad (\text{mod. } 8).$$

Die Summe in (24.) kann nach den in der erwähnten Abhandlung gegebenen Regeln bestimmt werden.

Diese Betrachtungsweise ist nicht mehr zutreffend in dem Falle, wo δ eine gerade Zahl ist. Für diesen Fall kann man folgenden Weg einschlagen, der auch für ein ungerades δ noch gültig bleibt. Man kann unter allen Umständen ein Zahlensystem $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_p$ bestimmen, das aus den Zahlen 0, 1 gebildet sein kann, welches der Congruenz genügt:

$$(26.)\quad \varepsilon_i \equiv \sigma_1^{(i)}\mu_1 + \sigma_2^{(i)}\mu_2 + \dots + \sigma_p^{(i)}\mu_p \quad (\text{mod. } 2), \qquad i = 1, 2, \dots p.$$

Um diese Behauptung zu beweisen, setze man

$$(27.)\quad \mu_k \equiv \varrho_k^{(1)}\nu_1 + \varrho_k^{(2)}\nu_2 + \dots + \varrho_k^{(p)}\nu_p \qquad (\text{mod. } 2)$$

und führe zur Abkürzung die Bezeichnung ein:

$$\sum_h \varrho_h^{(k)} \sigma_h^{(i)} = [k, i],$$

so dass

$$(28.)\quad [k, i] = [i, k], \qquad [i, i] \equiv \varepsilon_i \quad (\text{mod. } 2).$$

Demnach erhält man zur Bestimmung der Zahlen ν folgende Congruenzen, modulo 2:

$$(29.)\quad \begin{cases} [1, 1]\nu_1 + [1, 2]\nu_2 + \dots + [1, p]\nu_p \equiv [1, 1], \\ [2, 1]\nu_1 + [2, 2]\nu_2 + \dots + [2, p]\nu_p \equiv [2, 2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [p, 1]\nu_1 + [p, 2]\nu_2 + \dots + [p, p]\nu_p \equiv [p, p]. \end{cases}$$

Es ist nachzuweisen, dass diese Congruenzen unter allen Umständen gelöst werden können; denn sind diese gelöst, so sind (27.) die Lösungen von (26.). Man kann annehmen, dass eine der Grössen $[1,1]$, $[2,2]$, ... $[p,p]$, etwa $[1,1]$ ungerade sei; denn sind alle diese Grössen gerade, so sind die Congruenzen (29.) erfüllt, wenn sämmtliche ν gerade Zahlen sind.

Ist also $[1,1]$ ungerade, so setze man

$$(30.)\qquad \nu_1 \equiv [1,2]\nu_2+[1,3]\nu_2+\cdots+[1,p]\nu_p+1,$$

wodurch das System (29.) übergeht in folgendes:

$$(31.)\quad \left\{\begin{array}{l} ([2,2]+[1,2])\nu_2+([2,3]+[1,2][1,3])\nu_3+\cdots+([2,p]+[1,2][1,p]\nu_p \\ \qquad\qquad \equiv [2,2]+[1,2], \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ ([p,2]+[p,1][1,2])\nu_2+([p,3]+[p,1][1,3])\nu_3+\cdots+\;([p,p]+[1,p])\nu_p \\ \qquad\qquad \equiv [p,p]+[1,p]. \end{array}\right.$$

Die Lösungen von (31.) zusammen mit (30.) geben die Lösungen von (29.). Es ist aber (31.) von derselben Form wie (29.); nur enthält es eine Congruenz und eine Unbekannte weniger. Der Beweis ergiebt sich demnach durch den Schluss von $p-1$ auf p, da eine Congruenz wie

$$[p,p]\nu_p \equiv [p,p] \qquad (\text{mod. } 2)$$

stets lösbar ist.

Hat man diesen Bedingungen gemäss die Grössen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p$ bestimmt, so setze man in (20.) für die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ die diesen nach (26.) congruenten Ausdrücke, wodurch man erhält:

$$(32.)\quad \left\{\begin{array}{l} T = \dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}\sum\limits_i\sum\limits_h \varepsilon'_i \sigma_h^{(i)}\mu_h}}{\pi^{\frac{1}{2}p}\sqrt{\Delta}(\delta)^{p-1}}\, e^{-\frac{1}{4}\pi i\sum\limits_{\varkappa}\sum\limits_{\lambda}\sum\limits_{i} s_{\varkappa}^{(i)}\sigma_{\lambda}^{(i)}\mu_{\varkappa}\mu_{\lambda}} \\ \qquad \times \sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_p} e^{-\frac{\pi i}{\delta}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu}\sum\limits_{h}\delta_{\mu}^{(h)}\varrho_{\nu}^{(h)}\lambda_{\mu}\lambda_{\nu}+\pi i\sum\limits_{h}\lambda_h\mu_h} \end{array}\right. ,$$

also eine Summe, die nach §. 10 der Abhandlung über die mehrfachen *Gauss*ischen Reihen bestimmt werden kann.

§. 4.

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, die Anwendbarkeit unserer Methode an einem Zahlenbeispiel zu zeigen. Wir beschränken uns dabei auf zwei Veränderliche und wählen für das Zahlensystem ϱ, σ, r, s folgende Zahlen:

$\sigma_1^{(1)} = 3,$	$\sigma_1^{(2)} = 8,$	$s_1^{(1)} = 4,$	$s_1^{(2)} = 4,$
$\sigma_2^{(1)} = -20,$	$\sigma_2^{(2)} = 7,$	$s_2^{(1)} = -20,$	$s_2^{(2)} = 1,$
$\varrho_1^{(1)} = 22,$	$\varrho_1^{(2)} = 56,$	$r_1^{(1)} = 29,$	$r_1^{(2)} = 28,$
$\varrho_2^{(1)} = -124,$	$\varrho_2^{(2)} = 43,$	$r_2^{(1)} = -124,$	$r_2^{(2)} = 6,$

welche, wie man leicht sieht, den Bedingungen des §. 1 genügen. Die Determinante δ ist eine ungerade Primzahl:

$$\delta = 181.$$

Es ist ferner:

$$\varepsilon_1 \equiv 0, \quad \varepsilon_2 \equiv 1, \quad \varepsilon_1' \equiv 0, \quad \varepsilon_2' \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2),$$

und nach der Bestimmung (25.) in §. 3 ist

$$\varepsilon_1 \equiv 2, \quad \varepsilon_2 \equiv 7 \quad (\text{mod. } 8).$$

Ferner ist

$$\sum_h \delta_1^{(h)} \varrho_1^{(h)} = 1274,$$
$$\sum_h \delta_1^{(h)} \varrho_2^{(h)} = \sum_h \delta_2^{(h)} \varrho_1^{(h)} = -8,$$
$$\sum_h \delta_2^{(h)} \varrho_2^{(h)} = 1121.$$

Danach erhält man für die Grössen γ (§. 3)

$$\gamma_{11} = 87, \quad \gamma_{12} = 4, \quad \gamma_{22} = -108,$$
$$\sum_h \sum_k \sum_l \delta_1^{(h)} \varrho_1^{(h)} s_l^{(k)} \varepsilon_k \equiv -1 \quad (\text{mod. } 8).$$

Es ist jetzt die Summe zu bestimmen:

$$S = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} e^{\frac{2\pi i}{181}(87\lambda_1^2 + 2.4\lambda_1\lambda_2 - 108\lambda_2^2)},$$

wo λ_1, λ_2 von einander unabhängig je ein vollständiges Restsystem nach dem Primzahlmodul 181 zu durchlaufen haben. Die Determinante D der quadratischen Form im Exponenten hat den Werth:

$$D = -9412 = -52.181,$$

ist also durch 181 theilbar (was übrigens eine allgemeine Eigenschaft aller der hier in Frage kommenden Reihen ist). Die Summe S ergiebt sich also nach (§. 4) der citirten Abhandlung über die mehrfachen *Gauss*ischen Summen:

$$S = \left(\frac{87}{181}\right) 181^{\frac{2}{2}} = \left(\frac{-108}{181}\right) 181^{\frac{2}{2}},$$

$$\left(\frac{87}{181}\right) = \left(\frac{181}{87}\right) = \left(\frac{7}{87}\right) = -\left(\frac{87}{7}\right) = -\left(\frac{3}{7}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) = 1,$$

also

$$S = 181^{\frac{2}{2}}.$$

olgt also:

$$T = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}}(1+i)\sqrt{181}}{\pi\sqrt{\Delta}}.$$

Wurzeln im Zähler sind positiv zu nehmen, $\sqrt{\Delta}$ so, dass der reelle Theil iv wird *).

Nach (34.) §. 2 ist:

$$\Delta = -\frac{1}{\pi^2}181(\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}-\beta_1^{(2)}\beta_2^{(1)}),$$

ich:

$$T = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}}(1+i)}{\sqrt{-(\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}-\beta_1^{(2)}\beta_2^{(1)})}}.$$

alle für die Transformation nothwendigen Formeln zusammenzustellen, ı wir noch an:

$$\pi i\beta_1^{(1)} = 22\pi i+3b_{11}-20b_{12},\quad \pi i\beta_1^{(2)} = 56\pi i+8b_{11}+7b_{12},$$
$$\pi i\beta_2^{(1)} = -124\pi i+3b_{21}-20b_{22},\quad \pi i\beta_2^{(2)} = 43\pi i+8b_{21}+7b_{22};$$

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{\beta_2^{(2)}}{\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}-\beta_1^{(2)}\beta_2^{(1)}},\quad \alpha_1^{(2)} = \frac{-\beta_2^{(1)}}{\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}-\beta_1^{(2)}\beta_2^{(1)}},$$
$$\alpha_2^{(1)} = \frac{-\beta_1^{(2)}}{\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}-\beta_1^{(2)}\beta_2^{(1)}},\quad \alpha_2^{(2)} = \frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}-\beta_1^{(2)}\beta_2^{(1)}};$$

$$k_1^{(1)} = 29\pi i+4b_{11}-20b_{12},\quad k_1^{(2)} = 28\pi i+4b_{11}+b_{12},$$
$$k_2^{(1)} = -124\pi i+4b_{21}-20b_{22},\quad k_2^{(2)} = 6\pi i+4b_{21}+b_{22};$$

$$= \alpha_1^{(1)}k_1^{(1)}+\alpha_2^{(1)}k_2^{(1)} = \frac{\beta_2^{(2)}k_1^{(1)}-\beta_1^{(2)}k_2^{(1)}}{\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}-\beta_1^{(2)}\beta_2^{(1)}},$$
$$= \alpha_1^{(1)}k_1^{(2)}+\alpha_2^{(1)}k_2^{(2)} = \alpha_1^{(2)}k_1^{(1)}+\alpha_2^{(2)}k_2^{(1)} = \frac{\beta_2^{(2)}k_1^{(2)}-\beta_1^{(2)}k_2^{(2)}}{\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}-\beta_1^{(2)}\beta_2^{(1)}} = \frac{-\beta_2^{(1)}k_1^{(1)}+\beta_1^{(1)}k_2^{(1)}}{\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}-\beta_1^{(2)}\beta_2^{(1)}},$$
$$= \alpha_1^{(2)}k_1^{(2)}+\alpha_2^{(2)}k_2^{(2)} = \frac{-\beta_2^{(1)}k_1^{(2)}+\beta_1^{(1)}k_2^{(2)}}{\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}-\beta_1^{(2)}\beta_2^{(1)}}.$$

ind also die Moduln der neuen ϑ-Function gebrochene Functionen der ıln der ursprünglichen, deren Zähler und Nenner vom zweiten Grade sind. ch hat man noch:

$$c_{11} = \frac{1121\pi i+181b_{22}}{-\pi^2(\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}-\beta_1^{(2)}\beta_2^{(1)})},$$
$$c_{12} = \frac{8\pi i-181b_{12}}{-\pi^2(\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}-\beta_1^{(2)}\beta_2^{(1)})},$$
$$c_{22} = \frac{1274\pi i+181b_{11}}{-\pi^2(\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}-\beta_1^{(2)}\beta_2^{(1)})}.$$

) Diese Bestimmungsweise trifft nur im Falle zweier Veränderlichen allgemein enn das Product aus zwei Wurzeln mit positiv reellem Theil hat, wenn die en unter dem Wurzelzeichen selbst positive reelle Theile besitzen, selbst einen ven reellen Theil (vgl. §. 3).

[illegible] Transformationsformel zu substitui[illegible]

[illegible]

$$= [illegible] \; (\alpha_1^{(1)} w_1 - [illegible] + \alpha_1^{(2)} w_1 + \alpha_2^{(2)} w_2;\, a).$$

[illegible] wählen wir folgen[illegible]

$$\varepsilon^{(1)} = -[illegible] \quad \varepsilon^{(2)} = 2.$$

$$\varepsilon = -1. \quad \varepsilon^{(2)} = 1.$$

$$\varepsilon_2^{(1)} = 1. \quad \varepsilon_2^{(2)} = -1.$$

$$\varepsilon_2^{(2)} = 5$$

[illegible] Es ist

[illegible] und [illegible].

[illegible]

und [illegible]

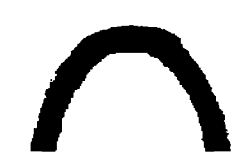
[illegible]

[illegible] hat man:

$$[illegible] = -1.$$

$$[illegible] = i.$$

[illegible]



Diese zerfällt nach §. 10 meiner Arbeit über die mehrfachen *Gauss*ischen Summen in die beiden folgenden:

$$-\sum_{\lambda_1,\lambda_2} e^{\frac{\pi i}{66}(53\lambda_1^2-70\lambda_1\lambda_2-277\lambda_2^2)}+\sum_{\lambda_1,\lambda_2} e^{\frac{\pi i}{66}(4.53\lambda_1^2-2.70\lambda_1\lambda_2-277\lambda_2^2)}.$$

Nach §. 3 der erwähnten Abhandlung zerfällt jede dieser Summen in das Product von drei anderen. Wenn man sich der dort gebrauchten Bezeichnung bedient, und die Coefficienten in der quadratischen Form der Exponenten auf ihre kleinsten Reste nach den betreffenden Moduln reducirt, so ist die erste der obigen Summen:

$$-\tfrac{1}{2}\varphi\begin{Bmatrix}1, & -1\\ -1, & -1\end{Bmatrix}(4,4).\varphi\begin{Bmatrix}1, & -1\\ -1, & -2\end{Bmatrix}(3,3).\varphi\begin{Bmatrix}9, & -2\\ -2, & -2\end{Bmatrix}(11,11),$$

die zweite:

$$\tfrac{1}{2}\varphi\begin{Bmatrix}0, & 0\\ 0, & -1\end{Bmatrix}(4,4).\varphi\begin{Bmatrix}1, & -2\\ -2, & -2\end{Bmatrix}(3,3).\varphi\begin{Bmatrix}3, & -4\\ -4, & -2\end{Bmatrix}(11,11).$$

Nach den §§. 4 und 9 der citirten Abhandlung ist aber:

$$\varphi\begin{Bmatrix}1, & -1\\ -1, & -1\end{Bmatrix}(4,4) = 0,$$

$$\varphi\begin{Bmatrix}0, & 0\\ 0, & -1\end{Bmatrix}(4,4) = 8(1-i),$$

$$\varphi\begin{Bmatrix}1, & -2\\ -2, & -2\end{Bmatrix}(3,3) = i\,3^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi\begin{Bmatrix}3, & -4\\ -4, & -2\end{Bmatrix}(11,11) = \left(\tfrac{3}{11}\right)i\,11^{\frac{1}{2}} = i\,11^{\frac{1}{2}}.$$

Demnach ergiebt sich der Werth von T

$$T = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}(1+i)}{\sqrt{-(\beta_1^{(1)}\beta_2^{(2)}-\beta_1^{(2)}\beta_2^{(1)})}},$$

wo die Wurzel im Nenner mit positivem reellem Theil zu nehmen ist.

§. 5.

Es bleibt noch der Fall zu erledigen, wo die Determinante δ der Zahlen σ den Werth Null hat. Das Problem reducirt sich dann, allgemein zu reden, auf ein einfacheres, d. h. auf die Bestimmung einer Summe von minderer Vielfachheit.

Es lässt sich in diesem Fall ein Zahlensystem $e_k^{(i)}$ bestimmen, mit der Determinante ± 1, welches die Eigenschaft hat, dass

$$(1.)\qquad \sum_i e_k^{(i)} \sigma_h^{(i)} = A_h^{(k)},$$
$$A_h^{(k)} = 0, \text{ falls } q < k < p,$$

und die Determinante

$$D = \Sigma \pm A_1^{(1)} A_2^{(2)} \dots A_q^{(q)}$$

von Null verschieden ist. Hierin ist q eine von der Natur der Zahlen σ abhängige unter p gelegene Zahl.

Ferner lässt sich ein zweites Zahlensystem $g_i^{(k)}$ bestimmen, dessen Determinante ebenfalls ± 1 ist, mit der Eigenschaft:

$$(2.)\qquad \sum_i A_i^{(h)} g_i^{(k)} = a_k^{(h)},$$
$$a_k^{(h)} = 0, \text{ falls } q < k < p,$$

so dass die Determinante

$$d = \Sigma \pm a_1^{(1)} a_2^{(2)} \dots a_q^{(q)}$$

nicht verschwindet *).

Es sollen in der Folge mit $[e_k^{(i)}]$, $[g_i^{(k)}]$ die Unterdeterminanten der Determinanten:

$$(3.)\qquad \begin{cases} \Sigma \pm e_1^{(1)} e_2^{(2)} \dots e_p^{(p)} = \pm 1, \\ \Sigma \pm g_1^{(1)} g_2^{(2)} \dots g_p^{(p)} = \pm 1 \end{cases}$$

bezeichnet werden, ferner mit $d_i^{(k)}$ die Unterdeterminanten von d und eine Summe, die sich nur auf die Indices 1, 2, 3, ... q erstreckt, mit Σ'.

Man setze ferner:

$$(4.)\qquad \begin{cases} B_i^{(\lambda)} = \sum_h \varrho_i^{(h)} e_\lambda^{(h)}, \\ \pm b_l^{(k)} = \sum_i B_i^{(k)} [g_i^{(l)}], \quad B_l^{(k)} = \sum_i b_i^{(k)} g_l^{(i)}, \end{cases}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem die Determinante $\Sigma \pm g_1^{(1)} g_2^{(2)} \dots g_p^{(p)}$ den Werth $+1$ oder -1 hat. Aus den Gleichungen (18.) §. 1 ergeben sich dann leicht folgende Relationen:

$$(5.)\qquad \sum_i (B_i^{(l)} A_i^{(k)} - B_i^{(k)} A_i^{(l)}) = 0,$$

also:

$$(6.)\qquad \sum_i A_i^{(l)} B_i^{(k)} = 0 \qquad k > q.$$

---

*) Der Beweis dieser Behauptung sowie die Bestimmungsweise der Zahlensysteme e, g wird weiter unten (§. 6) nachgetragen werden.

Aus der letzteren Gleichung folgt mit Rücksicht auf die Definition von $A_i^{(l)}, B_l^{(k)}$:

$$(7.)\qquad \sum_i e_k^{(i)}\varepsilon_i \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2) \qquad k > q,$$

und ebenso aus (1.), (2.), (4.):

$$(7'.)\qquad \sum_i e_k^{(i)}\varepsilon_i \equiv \sum_h A_h^{(k)}B_h^{(k)} = \sum_h{}' a_h^{(k)} b_h^{(k)} \quad (\text{mod. } 2) \qquad k \leqq q.$$

Aus (5.), (6.) erhält man mittelst (2.) und (4.):

$$(8.)\qquad \sum_i{}'(a_i^{(h)}b_i^{(k)} - a_i^{(k)}b_i^{(h)}) = 0,$$

also:

$$(9.)\qquad \sum_i{}' a_i^{(l)}b_i^{(k)} = 0 \qquad k > q,$$

woraus weiter folgt:

$$(10.)\qquad b_l^{(k)} = 0 \qquad k > q, \quad l \gtreqless q.$$

Es lässt sich ferner nachweisen, dass die Determinanten:

$$(11.)\qquad \Sigma \pm B_{q+1}^{(q+1)} \dots B_p^{(p)}; \quad \Sigma \pm b_{q+1}^{(q+1)} \dots b_p^{(p)}$$

von Null verschieden sind.

Es folgt zunächst aus (19.) §. 1:

$$(12.)\qquad \sum_h B_h^{(i)} s_h^{(\mu)} = e_i^{(\mu)} \qquad i > q.$$

Wenn nun ein von Null verschiedenes Zahlensystem $m_{q+1}, \dots m_q$ existiren würde, so dass

$$m_{q+1}B_k^{(q+1)} + \dots + m_p B_k^{(p)} = 0 \qquad k > q,$$

so müsste in Folge der Gleichungen (6.) diese Gleichung für alle k erfüllt sein, und aus (12.) würde folgen:

$$m_{q+1}e_{q+1}^{(\mu)} + \dots + m_p e_p^{(\mu)} = 0$$

für alle μ, was gegen die Voraussetzung ist, dass die Determinante der e den Werth ± 1 habe. Es verschwindet also nicht die erste Determinante (11.). Ebenso lässt es sich von der zweiten Determinante zeigen, wenn man die aus (12.) folgende Gleichung benutzt:

$$(13.)\qquad \sum_{l=q+1}^{l=p} b_l^{(i)} \sum_h g_h^{(l)} s_h^{(\mu)} = e_i^{(\mu)}.$$

Man mache nun in der Formel (1.) §. 3 die Substitution:

$$u_k = \sum_h e_h^{(k)} v_h,$$

wodurch die Function ψ übergeht in folgende:

$$(14.)\quad \begin{cases} \psi(u_1, u_2, \dots u_p, h_1, h_2, \dots h_p) \\ = \mathfrak{p}(v_1, v_2, \dots v_q, h_1, h_2, \dots h_p) + i \sum\limits_{l=q+1}^{l=p} v_l (2\sum\limits_k h_k B_k^{(l)} - \sum\limits_i e_l^{(i)}\varepsilon_i), \end{cases}$$

worin:

$$(15.)\quad \begin{cases} \mathfrak{p}(v_1, v_2, \dots v_q, h_1, h_2, \dots h_p) = -\mathfrak{f}(v_1, v_2, \dots v_q) + \varphi(h_1, h_2, \dots h_p) \\ \qquad + i \sum_l{}' v_l (2 \sum_i \sum_k h_k \beta_k^{(i)} e_l^{(i)} - \sum_i e_l^{(i)} \varepsilon_i) - \frac{1}{2}\pi i \sum_i \varepsilon_i \varepsilon_i', \end{cases}$$

$$(16.)\quad \begin{cases} \mathfrak{f}(v_1, v_2, \dots v_q) = \sum_\nu{}' \sum_\lambda{}' C'_{\nu\lambda} v_\nu v_\lambda, \\ C'_{\nu\lambda} = \frac{1}{\pi i} \sum_i A_i^{(\nu)} \sum_h e_\lambda^{(h)} \beta_i^{(h)} \\ \qquad = \frac{1}{(\pi i)^2} \sum_h \sum_i b_{hi} A_h^{(\nu)} A_i^{(\lambda)} + \frac{1}{\pi i} \sum_i A_i^{(\nu)} B_i^{(\lambda)}. \end{cases}$$

Wenn man jetzt wie früher die Formel (1.) §. 3 nach sämmtlichen $v_1, v_2, \dots v_p$ zwischen den Grenzen 0 und π integrirt, so lassen sich links die Integrationen nach $v_{q+1}, \dots v_p$ ausführen, und sämmtliche Glieder geben den Werth Null mit Ausnahme derer, für die:

$$(17.)\quad \sum_k h_k B_k^{(l)} - \sum_i e_l^{(i)} \varepsilon_i = 0 \qquad l > q$$

ist, die bei jeder Integration den Werth π ergeben. Es folgt daraus unmittelbar:

$$(18.)\quad T\pi^q e^{\frac{1}{4}\sum_\varkappa \sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} \varepsilon_\varkappa \varepsilon_\lambda} = \sum_{h_1, h_2, \dots h_p} \int_0^\pi \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi e^{\mathfrak{p}} dv_1 dv_2 \dots dv_q,$$

worin die Summe rechter Hand über alle ganzzahligen Werthe der $h_1, h_2, \dots h_p$ zu erstrecken ist, die der Bedingung (17.) genügen.

Setzt man

$$(19.)\quad h_k = \lambda_k + \sum_i{}' m_i A_k^{(i)}$$

und nimmt an:

$$(20.)\quad \sum_i e_l^{(i)} \varepsilon_i = 0 \qquad l > q,$$

was wegen (7.) freisteht, so reducirt sich die Bedingung (17.) auf:

$$(21.)\quad \sum_i \lambda_i B_i^{(l)} = 0 \qquad l > q.$$

Endlich setze man:

$$\sum_i g_i^{(k)} h_i = l_k, \qquad \sum_i g_i^{(k)} \lambda_i = \mu_k,$$

so dass jedem ganzzahligen Werthsystem der h, λ ein ganzzahliges Werthsystem der l, μ entspricht und umgekehrt. Dann folgt aus (19.)

$$(22.)\quad \begin{cases} l_k = \mu_k + \sum_i{}' m_i a_k^{(i)} & k \leqq q, \\ l_k = \mu_k & k > q, \end{cases}$$

und die Bedingung (17.), (21.) wird wegen der Eigenschaften der Grössen $b_k^{(h)}$:

$$(23.)\quad \mu_{q+1} = 0, \quad \mu_{q+2} = 0, \quad \dots \quad \mu_p = 0.$$

———

Man erhält also alle in der Formel (16.) vorkommenden Zahlensysteme $h_1, h_2, \ldots h_p$, und jedes $(d)^{q-1}$ mal (unter (d) den positiven Werth von d verstanden), wenn man für $m_1, m_2, \ldots m_q$ alle möglichen ganzen Zahlen setzt, und $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_q$ je ein vollständiges Restsystem nach dem Modul d durchlaufen lässt *).

Nun hat die Function $\mathfrak{p}$ die Eigenschaft, wenn man für $h_1, h_2, \ldots h_p$ die Werthe (19.) setzt, dass

$$\mathfrak{p}(v_1, v_2, \ldots v_q; h_1, h_2, \ldots h_p) - \mathfrak{p}(v_1 + m_1\pi, v_2 + m_2\pi, \ldots v_q + m_q\pi; \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p)$$

ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ ist, und demnach geht die Formel (18.) in folgende über:

$$(24.)\quad \begin{cases} T\pi^q e^{\frac{1}{4}\sum\limits_{\varkappa}\sum\limits_{\lambda} a_{\varkappa\lambda}\varepsilon_\varkappa\varepsilon_\lambda} \\ = \dfrac{1}{(d)^{q-1}} \sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathfrak{p}(v_1, v_2, \ldots v_q, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p)}\, dv_1\, dv_2 \ldots dv_q, \end{cases}$$

worin die Werthsysteme, welche die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ zu durchlaufen haben, in der oben angegebenen Weise zu bestimmen sind.

Die Integration lässt sich in derselben Weise wie in §. 3 ausführen, und man erhält:

$$(25.)\quad \begin{cases} T = \dfrac{\pi^{-\frac{1}{2}q}}{(d)^{q-1}\sqrt{\Delta'}} e^{-\frac{1}{4}\sum\limits_{\varkappa}\sum\limits_{\lambda} a_{\varkappa\lambda}\varepsilon_\varkappa\varepsilon_\lambda - \frac{1}{2}i\pi\sum\limits_{h}\varepsilon_h\varepsilon'_h} \\ \times \sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p} e^{\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p) - \sum\limits_{i}' n_i (\sum\limits_{h} e_i^{(h)} (\sum\limits_{k} \lambda_k \beta_k^{(h)} - \frac{1}{2}\varepsilon_h))} . \end{cases}$$

Δ' bedeutet die Determinante der Function $\mathfrak{f}$, und das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{\Delta'}$ ist in der Weise zu bestimmen, wie es in §. 3 gezeigt wurde. Die Grössen n_i werden durch Auflösung der linearen Gleichungen bestimmt:

$$(26.)\quad \tfrac{1}{2}\mathfrak{f}'(n_l) = \sum_i e_l^{(i)} (\sum_k \lambda_k \beta_k^{(i)} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_i),$$

denen sich leicht mit Rücksicht auf die Relationen (21.) zwischen den λ die Form geben lässt:

$$(27.)\quad \frac{1}{\pi i} \sum_i' a_k^{(i)} n_i - \mu_k + \tfrac{1}{2}\sum_i\sum_h \alpha_h^{(i)} g_h^{(k)} \varepsilon_i = 0.$$

Substituirt man die daraus sich ergebenden Werthe von n_i in (25.), so folgt durch eine Rechnung, die der in §. 3 durchaus ähnlich ist, für T der Ausdruck:

---

*) Vgl. §. 6.

$$(28.)\quad \begin{cases} T = \dfrac{\pi^{-\frac{1}{2}q}}{\sqrt{\Delta'(d)^{q-1}}}(-1)^{\frac{1}{2}\sum\limits_i \varepsilon_i\varepsilon_i'}\, e^{-\frac{\pi i}{4d}\sum\limits_i\sum\limits_\nu \varepsilon_i\varepsilon_\nu \sum\limits_h \sum\limits_k{}' \sum\limits_l{}' d_k^{(l)} e_l^{(\nu)} g_h^{(k)} s_h^{(i)}} \\ \times \sum\limits_{\mu_1,\mu_2,\dots\mu_q} e^{-\frac{\pi i}{d}\sum\limits_\varkappa{}'\sum\limits_\nu{}'\sum\limits_l{}' d_\varkappa^{(l)} b_\nu^{(l)}\mu_\varkappa\mu_\nu + \frac{\pi i}{d}\sum\limits_k{}'\sum\limits_l{}' d_k^{(l)}\mu_k \sum\limits_i e_l^{(i)}\varepsilon_i}, \end{cases}$$

wo jetzt die Grössen $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_q$ von einander unabhängig je ein vollständiges Restsystem nach dem Modul d zu durchlaufen haben.

Unter der Voraussetzung nun, dass d ungerade ist, kann man wie in §. 3 schliessen, dass:

$$(29.)\qquad \sum_i e_h^{(i)}\varepsilon_i \equiv \sum_k{}'\sum_l{}' d_l^{(k)} b_l^{(k)} a_l^{(h)} \pmod{2} \qquad h \leqq q,$$

wie sich aus (7'.) ergiebt.

Es dürfen daher in der Formel (28.) für die Summen $\sum\limits_i e_l^{(i)}\varepsilon_i$ geradezu die Grössen auf der rechten Seite von (29.) gesetzt werden; darnach geht aus (28.) hervor:

$$(30.)\quad \begin{cases} T = \dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}\sum\limits_i \varepsilon_i\varepsilon_i'}}{\pi^{\frac{1}{2}q}\sqrt{\Delta'(d)^{q-1}}}\, e^{-\frac{\pi i}{4}\sum\limits_i\sum\limits_h\sum\limits_k{}'\sum\limits_l{}' d_k^{(l)} b_k^{(l)} g_h^{(k)} s_h^{(i)}\varepsilon_i} \\ \times \sum\limits_{\mu_1,\mu_2,\dots\mu_q} e^{-\frac{\pi i}{d}\sum\limits_\varkappa{}'\sum\limits_\nu{}'\sum\limits_l{}' d_\varkappa^{(l)} b_\nu^{(l)}\mu_\varkappa\mu_\nu + \pi i\sum\limits_k{}'\sum\limits_l{}' d_k^{(l)} b_k^{(l)}\mu_k}, \end{cases}$$

und wenn man endlich die Grössen $\gamma_{\varkappa\lambda}$ aus den Gleichungen bestimmt:

$$(31.)\qquad \sum_l{}' d_\varkappa^{(l)} b_\lambda^{(l)} = m_{\varkappa\lambda} d - 2\gamma_{\varkappa\lambda},$$

so folgt genau wie oben:

$$(32.)\qquad T = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}\sum\limits_i \varepsilon_i\varepsilon_i'}}{\pi^{\frac{1}{2}q}\sqrt{\Delta'(d)^{q-1}}}\, e^{-\frac{1}{4}\pi i\sum\limits_i\sum\limits_h\sum\limits_k{}'\sum\limits_l{}' d_k^{(l)} b_k^{(l)} g_h^{(k)} s_h^{(i)}\varepsilon_i} \sum_{\mu_1,\mu_2,\dots\mu_q} e^{\frac{2\pi i}{d}\sum\limits_\varkappa{}'\sum\limits_\lambda{}'\gamma_{\varkappa\lambda}\mu_\varkappa\mu_\lambda}.$$

Hier wird nun wieder die Summe nach den angegebenen Regeln gefunden. Es sind aber die ε jetzt aus den Congruenzen zu bestimmen:

$$\sum_i e_l^{(i)}\varepsilon_i \equiv \sum_k{}'\sum_h{}' d_h^{(k)} b_h^{(k)} a_h^{(l)} \pmod{8} \qquad l \leqq q,$$

$$\sum_i e_l^{(i)}\varepsilon_i \equiv 0 \qquad\qquad \pmod{8} \qquad l > q.$$

Für den Fall eines geraden d führt auch hier der in §. 3 eingeschlagene Weg zum Ziele, wie man ohne besonderen Beweis übersieht.

§. 6.

Es ist oben von zwei Sätzen Gebrauch gemacht worden, die sich auf Systeme linearer Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten beziehen, die vielleicht in dieser Form nicht bekannt sein dürften, und deren Beweise daher hier kurz nachgetragen werden sollen.

Der erste dieser Sätze, von dem in §. 3 und §. 5 eine Anwendung gemacht wurde, lautet:

Wenn ein System linearer Gleichungen vorliegt:

$$(1.)\quad h_i = m_1\sigma_i^{(1)} + m_2\sigma_i^{(2)} + \cdots + m_p\sigma_i^{(p)} + \lambda_i,\quad i = 1, 2, \ldots p,$$

dessen Determinante:

$$(2.)\quad \delta = \Sigma \pm \sigma_1^{(1)}\sigma_2^{(2)} \ldots \sigma_p^{(p)}$$

von Null verschieden ist, so erhält man jedes Zahlensystem $h_1, h_2, \ldots h_p$ und zwar jedes $(\delta)^{p-1}$mal, wenn man für $m_1, m_2, \ldots m_p$ alle möglichen ganzen Zahlen setzt, und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ von einander unabhängig je ein vollständiges Restsystem nach dem Modul δ durchlaufen lässt.

Zu diesem Beweise bemerken wir zunächst, dass es gestattet ist, für die m jede beliebige Substitution mit der Determinante ± 1 zu machen, denn was von den m gilt, gilt auch von den dadurch neu eingeführten Zahlen und umgekehrt.

Setzt man also:

$$m_1 = n_1,\quad m_2 = n_2 + rn_1,\quad m_3 = n_3,\quad \ldots\quad m_p = n_p,$$

was, wenn r eine beliebige Zahl ist, eine Substitution dieser Art ist, so geht aus (1.) hervor:

$$(1^a.)\quad h_i = n_1(\sigma_i^{(1)} + r\sigma_i^{(2)}) + n_2\sigma_i^{(2)} + \cdots + n_p\sigma_i^{(p)} + \lambda_i.$$

Man schliesst hieraus, dass man das System der Coefficienten des Systems (1.):

$$(3.)\quad \left\{\begin{array}{l} \sigma_1^{(1)},\ \sigma_1^{(2)},\ \ldots\ \sigma_1^{(p)} \\ \sigma_2^{(1)},\ \sigma_2^{(2)},\ \ldots\ \sigma_2^{(p)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sigma_p^{(1)},\ \sigma_p^{(2)},\ \ldots\ \sigma_p^{(p)} \end{array}\right.$$

dadurch verändern darf, dass man zu irgend einer Verticalreihe eine mit einem beliebigen Factor multiplicirte andere Verticalreihe hinzufügt, wodurch auch die Determinante δ nicht geändert wird.

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens lässt sich das System (3.) auf die Form bringen:

$$(4.)\quad \begin{cases} A_1, & 0, & 0, & \dots & 0 \\ A_2^{(1)}, & A_2, & 0, & \dots & 0 \\ A_3^{(1)}, & A_3^{(2)}, & A_3, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_p^{(1)}, & A_p^{(2)}, & A_p^{(3)}, & \dots & A_p. \end{cases}$$

Die Zahlen $A_1, A_2, \dots A_p$ findet man nach dem Algorithmus des grössten gemeinschaftlichen Theilers von einem System Zahlen, so dass A_1 der grösste Theiler von $\sigma_1^{(1)}, \sigma_1^{(2)}, \dots \sigma_1^{(p)}$ ist. Es wird dann auch:

$$\delta = A_1 A_2 \dots A_p,$$

woraus folgt, dass keine von den Grössen $A_1, A_2, \dots A_p$ verschwinden kann.

Unser Satz ist also nur noch zu beweisen für das System:

$$(1^b.)\quad \begin{cases} h_1 = \lambda_1 + A_1 m_1, \\ h_2 = \lambda_2 + A_2^{(1)} m_1 + A_2 m_2, \\ \dots\dots\dots \\ h_p = \lambda_p + A_p^{(1)} m_1 + A_p^{(2)} m_2 + \dots + A_p m_p. \end{cases}$$

Setzt man hierin, indem man unter $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{p-1}$ vorläufig unbestimmte Zahlen versteht:

$$(5.)\quad \begin{cases} m_1 = A_2 A_3 \dots A_p n_1 + \varrho_1, \\ m_2 = A_3 \dots A_p n_2 + \varrho_2, \\ \dots\dots\dots \\ m_{p-1} = A_p n_{p-1} + \varrho_{p-1}, \\ m_p = n_p, \end{cases}$$

so geht das System $(1^b.)$ über in folgendes:

$$(1^c.)\quad \begin{cases} h_1 = \lambda_1 + A_1 \varrho_1 + A_1 A_2 \dots A_p n_1, \\ h_2 = \lambda_2 + A_2^{(1)} \varrho_1 + A_2 \varrho_2 + A_2^{(1)} A_2 \dots A_p n_1 + A_2 A_3 \dots A_p n_2, \\ \dots\dots\dots \\ h_p = \lambda_p + A_p^{(1)} \varrho_1 + A_p^{(2)} \varrho_2 + \dots + A_p^{(p-1)} \varrho_{p-1} \\ \qquad + A_p^{(1)} A_2 A_3 \dots A_p n_1 + A_p^{(2)} A_3 \dots A_p n_2 + \dots + A_p n_p. \end{cases}$$

Hält man zunächst die Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{p-1}$ fest, so kann man für jedes Zahlensystem $h_1, h_2, \dots h_p$ eine Lösung des Systems $(1^c.)$ finden, wenn man

λ_1 aus einem vollständigen Restsystem modulo $A_1 A_2 \dots A_p$,
λ_2 – – – – modulo $A_2 \dots A_p$,
. . . .
λ_p – – – – modulo A_p,

entnimmt. Sind für die λ bestimmte Restsysteme festgesetzt, so erhält man auch nur je eine Lösung; denn gäbe es eine zweite $n'_1, n'_2, \dots n'_p$, denen die Werthe $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_p$ entsprechen, so würde daraus folgen:

$$0 = \lambda_1 - \lambda'_1 + A_1 A_2 \dots A_p (n_1 - n'_1),$$
$$0 = \lambda_2 - \lambda'_1 + A'_2 A_2 \dots A_p (n_1 - n'_1) + A_2 A_3 \dots A_p (n_2 - n'_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$0 = \lambda_p - \lambda'_p + A'_p A_2 A_3 \dots A_p (n_1 - n'_1) + \dots + A_p (n_p - n'_p);$$

also müsste sein:

$$\lambda_1 - \lambda'_1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } A_1 A_2 \dots A_p),$$
$$\lambda_2 - \lambda'_2 \equiv 0 \quad (\text{mod. } A_2 \dots A_p),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_p - \lambda'_p \equiv 0 \quad (\text{mod. } A_p),$$

daraus folgt $\lambda_i = \lambda'_i$ und ferner $n_i = n'_i$. Hat man nun alle Zahlensysteme n_i so ergeben sich nach (5.) daraus alle Zahlensysteme m, wenn man

$$\varrho_1 \text{ ein vollständiges Restsystem } (\text{mod. } A_2 A_3 \dots A_p),$$
$$\varrho_2 \quad - \quad - \quad - \quad (\text{mod. } A_3 \dots A_p),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\varrho_{p-1} \quad - \quad - \quad - \quad (\text{mod. } A_p)$$

durchlaufen lässt. Dann erhält man aber jedes Zahlensystem $h_1, h_2, \dots h_p$ in $A_2 . A_3^2 . A_4^3 \dots A_p^{p-1}$ verschiedenen Darstellungen.

Lässt man nun alle λ Restsysteme nach dem Modul δ durchlaufen, so durchläuft

$$\lambda_1 \text{ ein Restsystem modulo } A_1 A_2 \dots A_p,$$
$$\lambda_2 \; A_1 \text{ Restsysteme modulo } A_2 \dots A_p,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_p \; A_1 A_2 \dots A_{p-1} \text{ Restsysteme modulo } A_p.$$

Man erhält also dann jedes Zahlensystem $h_1, h_2, \dots h_p$ in

$$A_1^{p-1} A_2^{p-1} \dots A_{p-1}^{p-1} = (\delta)^{p-1}$$

verschiedenen Darstellungen, womit der am Eingang ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Eine geringere Anzahl Darstellungen eines jeden Zahlensystems $h_1, \dots h_p$ erhält man auf folgende Weise:

Es seien $\delta_x^{(\lambda)}$ die Unterdeterminanten von δ und:

$$\delta = \mu_1 \delta_1 = \mu_2 \delta_2 \dots = \mu_p \delta_p,$$

wo μ_i der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}, \dots \delta_p^{(i)}$ ist.

Setzt man dann in dem System (1.) für $m_1, m_2, \dots m_p$ alle möglichen Systeme ganzer Zahlen, und lässt $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ je ein vollständiges Restsystem durchlaufen resp. nach den Moduln $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_p$, so erhält man alle Zahlensysteme $h_1, h_2, \dots h_p$ und zwar jedes in

$$\frac{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_p}{\delta}$$

verschiedenen Darstellungen. Es sind natürlich immer, wenn es sich um die Anzahl der Darstellungsweisen handelt, die absoluten Werthe zu verstehen.

Der zweite der oben erwähnten Sätze, von dem in §. 5 Gebrauch gemacht ist, lässt sich so aussprechen:

Wenn die Determinante δ des Systems (1.) verschwindet, so kann man, indem man für $m_1, m_2, \dots m_p$ Substitutionen mit der Determinante ± 1 macht, das System (3.) der Coefficienten auf die Form bringen:

$$(6.)\quad \begin{cases} A_1^{(1)}, & A_1^{(2)}, & \dots & A_1^{(q)}, & 0, & \dots & 0 \\ A_2^{(1)}, & A_2^{(2)}, & \dots & A_2^{(q)}, & 0, & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_p^{(1)}, & A_p^{(2)}, & \dots & A_p^{(q)}, & 0, & \dots & 0. \end{cases}$$

Und wenn man auch für die $h_1, h_2, \dots h_p$ lineare Substitutionen mit der Determinante ± 1 macht, so erhält man neue lineare Gleichungen, die mit den gegebenen äquivalent sind, deren Coefficienten in dem Schema enthalten sind:

$$(7.)\quad \begin{cases} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \dots & a_1^{(q)}, & 0, & \dots & 0 \\ a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, & \dots & a_2^{(q)}, & 0, & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_q^{(1)}, & a_q^{(2)}, & \dots & a_q^{(q)}, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 0, & \dots & 0, & 0, & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \dots & 0, & 0, & \dots & 0. \end{cases}$$

Die erste Operation entspricht der wiederholten Addition von mit passenden Coefficienten multiplicirten Verticalreihen, die zweite demselben Verfahren mit Horizontalreihen.

Wenn die Determinante δ verschwindet, so muss in dem Schema (4.) eine der Grössen $A_1, A_2, \dots A_p$ verschwinden, und es sei A_{r+1} die erste dieser Zahlen, die Null ist. Es lässt sich dann durch Fortsetzung desselben

Verfahrens, durch das (4.) gebildet wurde, dieses Schema in die Form bringen:

$$(8.)\quad \begin{cases} A_1, & 0, \; 0, \; \ldots\ldots & 0, \; \ldots \; 0 \\ A_2^{(1)}, & A_2, \; 0, \; \ldots\ldots & 0, \; \ldots \; 0 \\ A_r^{(1)}, & A_r^{(2)}, \; \ldots\ldots \; A_r, & 0, \; \ldots \; 0 \\ A_{r+1}^{(1)}, & A_{r+1}^{(2)}, \; \ldots\ldots \; A_{r+1}^{(r)}, & 0, \; \ldots \; 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ A_p^{(1)}, & A_p^{(2)}, \; \ldots\ldots \; A_p^{(r)}, & A_p^{(r+1)}, \; \ldots \; 0. \end{cases}$$

Setzt man die $r+1^{\text{te}}$ Horizontalreihe an die letzte Stelle, was einer anderen Anordnung der Gleichungen (1.) entspricht, so erhält man aus (8.):

$$(8^a.)\quad \begin{cases} A_1, & 0, \; \ldots\ldots\ldots & 0, & 0 \\ A_2^{(1)}, & A_2, \; \ldots\ldots\ldots & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ A_p^{(1)}, & A_p^{(2)}, \; \ldots\ldots\ldots & A_p^{(p-1)}, & 0 \\ A_{r+1}^{(1)}, & A_{r+1}^{(2)}, \; \ldots\ldots \; A_{r+1}^{(r)}, \; 0, \; \ldots & 0, & 0. \end{cases}$$

Wenn nun von den Zahlen

$$A_{r+2}^{(r+1)}, \quad A_{r+3}^{(r+2)}, \quad \ldots \quad A_p^{(p-1)}$$

wieder eine Null ist, so kann man dieselben Operationen fortsetzen, und gelangt so zu dem Schema der Coefficienten:

$$(9.)\quad \begin{cases} A_1, & 0, & \ldots & 0, & 0, \; \ldots \; 0 \\ A_2^{(1)}, & A_2, & \ldots & 0, & 0, \; \ldots \; 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_q^{(1)}, & A_q^{(2)}, & \ldots & A_q, & 0, \; \ldots \; 0 \\ A_{q+1}^{(1)}, & A_{q+1}^{(2)}, & \ldots & A_{q+1}^{(q)}, & 0, \; \ldots \; 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_p^{(1)}, & A_p^{(2)}, & \ldots & A_p^{(q)}, & 0, \; \ldots \; 0, \end{cases}$$

welches die Form (6.) hat. Gleichzeitig ersieht man, dass die Determinante

$$\Sigma \pm A_1^{(1)} A_2^{(2)} \ldots A_q^{(q)} = A_1 A_2 \ldots A_q$$

von Null verschieden ist.

Es ist nun leicht zu sehen, wie man aus (9.) auf die Form (7.) gelangt durch Addition von Horizontalreihen. Man vernichtet zunächst in der q^{ten} Verticalreihe alle Glieder bis auf eines, dann in der $q-1^{\text{ten}}$ alle bis auf eines, indem man die q^{te} Horizontalreihe ganz aus dem Spiele lässt, u. s. f.

Man gelangt dadurch zu einer speciellen Form (7.):

$$\begin{array}{llllllll}
a_1, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0, & \dots & 0 \\
a_2^{(1)}, & a_2, & 0, & \dots & 0, & 0, & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_q^{(1)}, & a_q^{(2)}, & a_q^{(3)}, & \dots & a_q, & 0, & \dots & 0 \\
0, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0, & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0, & \dots & 0.
\end{array}$$

Damit ist auch der Beweis dieses Satzes geliefert.

Zürich, im Juni 1871.

Ueber binäre Formen.

(Von Herrn *S. Gundelfinger* in Tübingen.)

Herr *Hermite* hat im Bd. 52 dieses Journals, Seite 18 und ff. gezeigt, dass für jede gegebene binäre Form n^{ten} Grades

$$f(x_1, x_2) = f\,^{*)} = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = a_x^n = b_x^n = \dots$$

eine endliche Anzahl von Covarianten existirt, durch welche alle übrigen Formen von f sich rational ausdrücken lassen. Ein besonders ausgezeichnetes System solcher Covarianten ergiebt sich, indem man in $f(y_1, y_2)$ an Stelle von y_1 und y_2 neue Variable ξ_1 und ξ_2 durch die Formeln

$$(1.)\qquad f\cdot y_1 = \xi_1 x_1 - \xi_2 \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad f\cdot y_2 = \xi_1 x_2 + \xi_2 \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x_1}$$

einführt. Man bekommt dann eine Gleichung von der Gestalt

$$(2.)\qquad \begin{cases} f^{n-1} f(y_1, y_2) = \xi_1^n + \binom{n}{2} f_2 \xi_1^{n-2}\xi_2^2 - \binom{n}{3} f_3 \xi_1^{n-3}\xi_2^3 + \cdots \\ \qquad = F(\xi_1, \xi_2) = (\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2)^n = (\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2)^n = \dots, \end{cases}$$

worin wir α_1 und α_2, β_1 und β_2 etc. die symbolischen Coefficienten von $F(\xi_1, \xi_2)$ bedeuten lassen und also

$$\alpha_1^n = 1, \quad \alpha_1^{n-1}\alpha_2 = 0, \quad \alpha_1^{n-2}\alpha_2^2 = f_2, \quad \alpha_1^{n-3}\alpha_2^3 = -f_3 \dots$$

annehmen. Jede Covariante und Invariante von $f(y_1, y_2)$ ändert sich nun durch die lineare Transformation (1.) nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante $\frac{1}{f}$. Setzt man in der Gleichung, die dieses ausdrückt, $y_1 = x_1$ und $y_2 = x_2$ ($\xi_1 = f$ und $\xi_2 = 0$), so findet man alle Formen von f gleich ganzen Functionen von $f, f_2, f_3, \dots f_n$, dividirt durch Potenzen von f.

Dieser von Herrn *Hermite* gemachten Entdeckung hat Herr *Clebsch* die weitere $^{**)}$ hinzugefügt, dass $f_2, f_3, \dots f_n$, mit passenden Potenzen von f

*) Wir werden im Folgenden die Argumente x_1, x_2 auch bei andern Formen unterdrücken.

**) Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen Jahrgang 1870, Seite 405. Wieder abgedruckt in den mathematischen Annalen von *Clebsch* und *Neumann*, Bd. III, Seite 265—267.

multiplicirt, sich rational und ganz durch die n einfacheren Formen

$$f,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \dots\ \psi_{\left[\frac{n}{2}\right]},\quad \chi_1,\ \chi_2,\ \dots\ \chi_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$$

darstellen lassen müssen, wobei ψ_h und χ_h durch die Gleichungen

$$\psi_h = (f,f)^{2h} = (ab)^{2h} a_x^{n-2h} b_x^{n-2h},$$
$$\chi_h = (\psi_h, f) = (ab)^{2h}(ac) a_x^{n-2h-1} b_x^{n-2h} c_x^{n-1}$$

definirt sind.

Untersuchungen über die Theorie der ternären cubischen Formen, in denen ähnliche Covarianten zweier Variablen auftreten, liessen mich vermuthen, dass die f_i selbst, ohne vorher mit Potenzen von f multiplicirt werden zu müssen, rationale ganze Functionen der ψ_h und χ_h seien, wie dies auch bei den durch Herrn *Clebsch* mitgetheilten Werthen von f_2 bis f_7 der Fall ist. In der That gelangte ich ohne Mühe zum Nachweise der Richtigkeit dieser Vermuthung, indem ich die Covarianten $(ab)^{2h} a_y^{n-2h} b_y^{n-2h}$ und $(ab)^2\,(ac) a_y^{n-2h-1} b_y^{n-2h} c_y^{n-1}$ aus der Gleichung (2.) bildete und hernach $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ setzte, indem ich somit dasselbe Verfahren anwandte, das oben angegeben worden, um ψ_h und χ_h durch $f, f_2, \dots f_n$ auszudrücken. Die ausführlichere Entwicklung dieses Gedankens, namentlich auch in seiner Anwendung auf das simultane System zweier binären Formen, bildet den Gegenstand der vorliegenden Note.

Nach (2.) hat man

$$f^{2n-2}(ab)^{2h} a_y^{n-2h} b_y^{n-2h} = f^{2h}(\alpha\beta)^{2h} \alpha_\xi^{n-2h} \beta_\xi^{n-2h}.$$

Durch die Annahme $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 (\xi_1 = f, \xi_2 = 0)$ wird die linke Seite dieser Gleichung identisch mit $f^{2n-2}\psi_h$, während sich die rechte auf

$$2f^{2n-2h}\Big(f_{2h} + \binom{2h}{2} f_{2h-2} f_2 - \binom{2h}{3} f_{2h-3} f_3 + \cdots$$
$$+ (-1)^{h-1}\binom{2h}{h-1} f_{h+1} f_{h-1} + \tfrac{1}{2}(-1)^h \binom{2h}{h} f_h^2\Big)\ ^{*)}$$

reducirt. Die letzte Relation geht also über in

$$(3.)\quad \begin{cases} f_{2h} = \tfrac{1}{2}\psi_h \cdot f^{2h-2} - \binom{2h}{2} f_{2h-2} f_2 + \binom{2h}{3} f_{2h-3} f_3 - \cdots \\ -(-1)^{h-1}\binom{2h}{h-1} f_{h+1} f_{h-1} - (-1)^h \tfrac{1}{2}\binom{2h}{h} f_h^2. \end{cases}$$

Um eine Recursionsformel für f_{2h+1} zu bekommen, gehen wir von der

---

*) Der Coefficient von ξ_1^{2n-4h} in $(\alpha\beta)^{2h}\alpha_\xi^{n-2h}\beta_\xi^{n-2h}$ ist:

$$(\alpha\beta)^{2h}\alpha_1^{n-2h}\beta_1^{n-2h} = 2\Big(f_{2h} + \binom{2h}{2} f_{2h-2} f_2 - \cdots (-1)^{h-1}\binom{2h}{h-1} f_{h+1} f_{h-1} + \tfrac{1}{2}(-1)^h\binom{2h}{h} f_h^2\Big).$$

evidenten Gleichung aus

$$f^{3n-3}(ab)^{2h}(ac)\,a_y^{n-2h-1}\,b_y^{n-2h}\,c_y^{n-1} = f^{2h+1}(\alpha\beta)^{2h}(\alpha\gamma)\,\alpha_\xi^{n-2h-1}\,\beta_\xi^{n-2h}\,\gamma_\xi^{n-1}.$$

Setzen wir in ihr $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, so wird die linke Seite derselben gleich $\chi_h . f^{3n-3}$ und die rechte gleich

$$f^{3n-2h-1}\left(-2h f_2 f_{2h-1} + \binom{2h}{2} f_3 f_{2h-2} - \binom{2h}{3} f_4 f_{2h-3} + \cdots + \binom{2h}{2} f_{2h-1} f_2 + f_{2h+1}\right)^{*)};$$

es ist daher:

$$(4.)\quad f_{2h+1} = \chi_h . f^{2h-2} + 2h f_2 f_{2h-1} - \binom{2h}{2} f_3 f_{2h-2} + \binom{2h}{3} f_4 f_{2h-3} - \cdots - \binom{2h}{2h-2} f_{2h-1} f_2 .$$

Diese letzte Gleichung im Verein mit (3.) liefert das einfachste Mittel, um $f_2, f_3, \ldots f_n$ successive als *ganze* Functionen der ψ_h und χ_h darzustellen.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich auch noch anwenden, wenn zu f eine andere beliebige Form φ vom m^{ten} Grade hinzutritt.

Es möge $\varphi(y_1, y_2)$ durch die Substitutionen (1.) übergehen in

$$f^m \varphi(y_1, y_2) = \varphi \xi_1^m - m\varphi_1 \xi_1^{m-1}\xi_2 + \binom{m}{2}\varphi_2 \xi_1^{m-2}\xi_2^2 - \binom{m}{3}\varphi_3 \xi_1^{m-3}\xi_2^3 + \cdots = \Phi(\xi_1, \xi_2),$$

worin also der Kürze wegen gesetzt ist:

$$\varphi_1 = \frac{1}{m\,n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{m(m-1)n^2}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right\},$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{m(m-1)(m-2)n^3}\left\{\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^3 - 3\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\frac{\partial f}{\partial x_1} + 3\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1 \partial x_2^2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 - \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_2^3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^3\right\},$$

. . . .

Nach der Fundamentaleigenschaft der Covarianten ist alsdann für jede positive ganze Zahl $k \leqq n$,

$$f^{n+m-k}(f(y_1, y_2), \varphi(y_1, y_2))^k = f^k(F(\xi_1, \xi_2), \Phi(\xi_1, \xi_2))^k.$$

---

*) Da $\gamma_1^n = 1$, $\gamma_1^{n-1}\gamma_2 = 0$, so hat $\xi_1^{3n-4h-2}$ in $(\alpha\beta)^{2h}(\alpha\gamma)\alpha_\xi^{n-2h-1}\beta_\xi^{n-2h}\gamma_\xi^{n-1}$ den Coefficienten

$$(\alpha\beta)^{2h}(\alpha\gamma)\alpha_1^{n-2h-1}\beta_1^{n-2h}\gamma_1^{n-1} = -(\alpha\beta)^{2h}\alpha_1^{n-2h-1}\alpha_2\beta_1^{n-2h}$$
$$= -2h f_2 f_{2h-1} + \binom{2h}{2} f_3 f_{2h-2} - \binom{2h}{3} f_4 f_{2h-3} + \cdots + \binom{2h}{2} f_{2h-1} f_2 + f_{2h+1}.$$

Indem man in dieser Formel $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ oder $\xi_1 = f$, $\xi_2 = 0$ annimmt, wird die linke Seite derselben identisch mit $f^{n+m-1}(f,\varphi)^k$ und die rechte mit

$$(-1)^k f^{m+n-k}\left(\varphi_k + \binom{k}{2}\varphi_{k-2}f_2 - \binom{k}{3}\varphi_{k-3}f_3 + \cdots + (-1)^k \varphi f_k\right),$$

so dass man hat

$$(5.)\qquad \varphi_k + \binom{k}{2}\varphi_{k-2}f_2 - \binom{k}{3}\varphi_{k-3}f_3 + \cdots + (-1)^k\varphi . f_k = (-1)^k f^{k-1}(f,\varphi)^k.$$

Vermittelst dieser Recursionsformel kann man die φ_k ($k \leqq n$) stufenweise rational und ganz durch $f, f_2, f_3, \ldots f_k$ und $(f,\varphi), (f,\varphi)^2, \ldots (f,\varphi)^k$ ausdrücken. Für $k=2$ und $k=3$ hat man z. B. mit Rücksicht auf die bekannten Werthe von f_2 und f_3:

$$\varphi_2 = -\tfrac{1}{2}\varphi.\psi_1 + f(f,\varphi)^2,$$
$$\varphi_3 = \varphi.\chi_1 - \tfrac{3}{2}(\varphi,f)\psi_1 - f^2(f,\varphi)^3.$$

Wofern $k > n$, also etwa gleich $n+h$ ist, gestaltet sich die Recursionsformel für φ_{n+h} nicht so einfach, wie in (5.). Wir unterdrücken daher hier die Entwicklung derselben und bemerken nur, dass man alsdann anstatt von der Gleichung (2.) von der im Grunde mit ihr identischen

$$f^{n-1}f(y_1,y_2)\left(y_1\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^h = \xi_1^{n+h} + \binom{n}{2}f_2\xi_1^{n+h-2}\xi_2^2 - \binom{n}{3}f_3\xi_1^{n+h-3}\xi_2^3\ldots$$

ausgehen und die $(n+h)^{\text{te}}$ Uebereinanderschiebung von

$$\varphi(y_1,y_2) \quad\text{und}\quad f(y_1,y_2)\left(y_1\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^h$$

bilden muss.

Uebrigens kann man offenbar, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, stets $m \leqq n$ voraussetzen und somit das Theorem aussprechen:

Sämmtliche Covarianten und Invarianten des simultanen Systems zweier beliebiger Formen f und φ vom n^{ten} und m^{ten} Grade ($m \leqq n$) lassen sich, mit passenden Potenzen von f multiplicirt, als rationale ganze Function der $m+n$ Formen

$$f,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \ldots\ \psi_{\left[\frac{n}{2}\right]},\ \chi_1,\ \chi_2,\ \ldots\ \chi_{\left[\frac{n-1}{2}\right]},\ (f,\varphi),\ (f,\varphi)^2,\ \ldots\ (f,\varphi)^m$$

darstellen.

Ausser den Anwendungen, die bereits die Herren *Hermite* und *Clebsch* von den associirten Covarianten gemacht haben, mag hier zum Schlusse noch eine

weitere erwähnt werden. Aus der Gleichung (2.) ergiebt sich nämlich für $n = 4$ und $n = 3$ fast ohne alle Rechnung die Auflösung der biquadratischen und cubischen Gleichungen in der Form, wie sie von Herrn *Aronhold* in Bd. 52 dieses Journals Seite 95 und von mir in Bd. 2 der mathematischen Annalen von *Clebsch* und *Neumann* Seite 272 aufgestellt worden ist*).

*) Herr *Clebsch*, dem ich diese Auflösung mitgetheilt, schreibt mir, dass er dieselbe schon seit längerer Zeit kenne und in seinen Vorlesungen entwickelt habe.

Tübingen im Mai 1871.

Ueber eine Eigenschaft der reciproken Curven.

(Von Herrn *M. Pasch* in Giessen.)

Ist die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung gegeben

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

und setzt man

$$f(\lambda a_1+\mu b_1, \lambda a_2+\mu b_2, \lambda a_3+\mu b_3) = g_0\mu^n+g_1\mu^{n-1}\lambda+\cdots+g_n\lambda^n,$$

so ist die Discriminante R dieser Function von λ, μ eine homogene Function $n(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Ausdrücke

$$y_1 = a_2b_3-a_3b_2,\quad y_2 = a_3b_1-a_1b_3,\quad y_3 = a_1b_2-a_2b_1:$$

$$R = \begin{vmatrix} g_1 & 2g_2 & 3g_3 & \cdot \\ 0 & g_1 & 2g_2 & \cdot \\ 0 & 0 & g_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ng_0 & (n-1)g_1 & (n-2)g_2 & \cdot \\ 0 & ng_0 & (n-1)g_1 & \cdot \\ 0 & 0 & ng_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \varphi(y_1, y_2, y_3),$$

und $\varphi=0$ die Gleichung der reciproken Curve. Die letztere erhält man auch, indem man aus den Gleichungen

$$f=0,\quad y_i=\varrho f_i,\quad \text{wo } f_i=\frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_i},\qquad (i=1,2,3)$$

ϱ und die x_i eliminirt, d. h. $f=0$ geht durch die rationale Substitution $y_i=\varrho f_i$ in $\varphi=0$ über.

Von der Curve $\varphi=0$ gelangt man zur ursprünglichen zurück, indem man die reciproke von $\varphi=0$ bildet; dabei ergiebt sich f, multiplicirt mit einem Factor, dessen Bedeutung *Plücker* nachgewiesen hat. Man kann aber auch die f_i für die y_i in φ substituiren; die dann entstehende Function vom Grade

$n(n-1)^2$ in x muss ebenfalls durch f theilbar sein, so dass

$$\varphi(f_1, f_2, f_3) = f.M.$$

Ein solcher Factor M tritt bei jeder rationalen Substitution auf, ohne dass seine Eigenschaften näher bekannt wären (vgl. *Clebsch* und *Gordan*, Theorie der *Abel*schen Functionen, III. Abschnitt). Für den vorliegenden Fall werde ich zeigen, dass das Schnittpunktsystem der Curven

$$f=0, \quad M=0$$

zusammengesetzt ist aus den dreimal zu rechnenden Wendepunkten der Curve $f=0$ und den Berührungspunkten ihrer Doppeltangenten, woraus auch die Anzahl dieser Punkte folgt. Das Mittel besteht in der Herstellung einer Identität, welche die Absonderung des Factors M vom Grade $n^2(n-2)$ und seine behauptete Beziehung zu f veranschaulicht. Diese Identität beruht auf einer Eigenschaft der Discriminante, welche zuerst bewiesen werden soll.

1.

Satz. Ordnet man die Discriminante R nach Potenzen von g_0 und g_1, so ist das einzige Glied von weniger als zwei Dimensionen

$$g_0 g_2^3 \Delta,$$

wo Δ die Discriminante der Function von λ, μ

$$g_2\mu^{n-2} + g_3\mu^{n-3}\lambda + g_4\mu^{n-4}\lambda^2 + \cdots + g_n\lambda^{n-2} \text{ *)}.$$

Beweis. Zerlegt man die Determinante R in Producte von Partialdeterminanten, indem man die drei ersten Colonnen in eine, die $2n-5$ übrigen in eine zweite Gruppe zusammenfasst, so kommt ein Glied

$$(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} g_1 & 2g_2 & 3g_3 \\ 0 & g_1 & 2g_2 \\ ng_0 & (n-1)g_1 & (n-2)g_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2g_2 & 3g_3 & \cdot \\ g_1 & 2g_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (n-2)g_2 & (n-3)g_2 & \cdot \\ (n-1)g_1 & (n-2)g_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

vor und ausserdem nur Glieder von mindestens zwei Dimensionen in g_0 und

*) Eine andere Relation zwischen R und Δ ist von *Joachimsthal* (Dieses J. Bd. 33. p. 371) angegeben und von Herrn *Cayley* (ib. 34, p. 30) zur Untersuchung der Wendepunkte und Doppeltangenten benutzt worden.

g_1. Die niedrigeren Glieder reduciren sich also auf das Product

$$(-1)^{n-1} 4n g_0 g_2^2 \begin{vmatrix} 2g_2 & 3g_3 & \cdot \\ 0 & 2g_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (n-2)g_2 & (n-3)g_3 & \cdot \\ 0 & (n-2)g_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist aber (abgesehen von einem numerischen Factor) das Product von g_2 in die Discriminante von $g_2\mu^{n-2}+g_3\mu^{n-3}\lambda+g_4\mu^{n-4}\lambda^2+\cdots+g_n\lambda$

$$\begin{vmatrix} g_3 & 2g_4 & \cdot \\ 0 & g_3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (n-2)g_2 & (n-3)g_3 & \cdot \\ 0 & (n-2)g_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man nämlich die i^{te} Zeile mit $\frac{n-2}{n}$, die $(n+i-3)^{\text{te}}$ mit $\frac{2}{n}$ und subtrahirt diese dann von der ersteren, wobei $i = 1, 2, \ldots n-3$ zu nehmen, so verwandelt sich irgend ein Element ig_i der $n-3$ ersten Zeilen in

$$\frac{n-2}{n} ig_i - \frac{2}{n}(n-i)g_i = (i-2)g_i.$$

2.

Für a und b wähle ich nun die Durchschnittspunkte von zwei beliebigen Geraden $\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2+\alpha_3 z_3 = 0$, $\beta_1 z_1+\beta_2 z_2+\beta_3 z_3 = 0$ mit der Geraden $f_1 z_1+f_2 z_2+f_3 z_3 = 0$ und setze $\Sigma\pm\alpha_1\beta_2 f_3 = A$, so dass

$$a_1 = \alpha_2 f_3-\alpha_3 f_2,\quad a_2 = \alpha_3 f_1-\alpha_1 f_3,\quad a_3 = \alpha_1 f_2-\alpha_2 f_1,$$
$$b_1 = \beta_2 f_3-\beta_3 f_2,\quad b_2 = \beta_3 f_1-\beta_1 f_3,\quad b_3 = \beta_1 f_2-\beta_2 f_1,$$
$$y_1 = Af_1,\quad y_2 = Af_2,\quad y_3 = Af_3.$$

Die Gerade β soll durch den Punkt x gelegt werden; legt man sie noch durch einen willkürlichen Punkt c, so wird

$$\beta_1 = c_2x_3-c_3x_2,\quad \beta_2 = c_3x_1-c_1x_3,\quad \beta_3 = c_1x_2-c_2x_1,\quad b_i = x_i(c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3)-c_if,$$
$$A = \alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3 = (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)(c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3)-f(\alpha_1c_1+\alpha_2c_2+\alpha_3c_3$$

Für diese Werthe von a und b berechnen wir die Coefficienten g_0, g_1, g_2. Wenn wir dann $\frac{1}{n-1}\frac{\partial}{\partial x_k} f_i(x_1, x_2, x_3)$ mit $f_{ik}(x_1, x_2, x_3)$, die *Hessesche* Determinante $\Sigma \pm f_{11} f_{22} f_{33}$ mit H und durch f theilbare Ausdrücke jedesmal mit (f) bezeichnen, so erhalten wir:

$$g_0 = f(b_1, b_2, b_3) = -(n-1) f(c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3)^n + (f^2),$$

$$g_1 = n \Sigma a_i f_i(b_1, b_2, b_3) = n(c_1 f_1 + \cdots)^{n-1}(a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3) + (f) = (f),$$

$$g_2 = \tfrac{1}{2} n(n-1) \Sigma a_i a_k f_{ik}(b_1, b_2, b_3) = \tfrac{1}{2} n(n-1)(c_1 f_1 + \cdots)^{n-2} \Sigma a_i a_k f_{ik} + (f)$$

$$= \tfrac{1}{2} n(n-1)(c_1 f_1 + \cdots)^{n-2} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 & \alpha_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_2 & \alpha_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_3 & \alpha_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (f)$$

$$= -\tfrac{1}{2} n(n-1)(c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3)^{n-2} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2 H + (f).$$

Zu R übergehend, finden wir:

$$R = \varphi(y_1, y_2, y_3) = A^{n(n-1)} \varphi(f_1, f_2, f_3) = [(\Sigma \alpha_i x_i \Sigma c_k f_k)^{n(n-1)} + (f)] \varphi(f_1, f_2, f_3).$$

Endlich wird die Determinante $\varDelta$, welche in den b_i homogen und vom Grade $n(n-1)-(4n-6)$ ist,

$$\varDelta = \varDelta' + (f) = (c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3)^{n(n-1)-(4n-6)} D + (f),$$

wenn nämlich $\varDelta'$ und D aus $\varDelta$ entstehen, indem man resp. $x_i(c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3)$ und x_i für b_i setzt.

3.

Auf Grund des Satzes (1.) besteht zwischen den jetzt eingeführten Ausdrücken, da g_0 und g_1 durch f theilbar sind, folgende Beziehung:

$$R = A^{n(n-1)} \varphi(f_1, f_2, f_3) = g_0 g_2^3 \varDelta + (f^2) = -(n-1) f(c_1 f_1 + \cdots)^n g_2^3 \varDelta + (f^2),$$

und es ist demnach $\varphi(f_1, f_2, f_3)$ durch f theilbar, gleich $f.M$. Daraus ergiebt sich weiter:

$$(\Sigma \alpha_i x_i \Sigma c_k f_k)^{n(n-1)} M = \sigma (\Sigma c_k f_k)^{n(n-1)} (\Sigma \alpha_i x_i)^6 H^3 D + (f),$$

wo σ ein numerischer Factor, und man kann nun mit $(c_1 f_1 + \cdots)^{n(n-1)} (\alpha_1 x_1 + \cdots)^6$ dividiren:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^{n^2-n-6} M = \sigma H^3 D + (f).$$

Aus dieser Identität entnimmt man das Schnittpunktsystem der Curven $f = 0$, $M = 0$. Es liefert nämlich $H = 0$ die Wendepunkte und $D = 0$ die

Berührungspunkte der Doppeltangenten von f, wenn man die auf der Geraden α gelegenen Punkte (n^2-n-6) mal in Abzug bringt. Unter den $n^3(n-2)$ Schnittpunkten von f und M befinden sich also die $3n(n-2)$ Wendepunkte von f je dreimal: die übrigen

$$n^3(n-2)-9n(n-2) = n(n-2)(n^2-9)$$

Punkte sind die Berührungspunkte der $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten. —

Nach *Jacobi* (Bd. 40. pag. 237 dieses Journals, vgl. die Note des Herrn *Clebsch*, ebendaselbst Bd. 63. pag. 186) muss sich übrigens aus D durch Anwendung der Gleichung $f=0$ die $(n^2-n-6)^{\text{te}}$ Potenz von $\alpha_1 x_1+\cdots$ ausscheiden lassen, so dass D von der Form

$$D = (\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3)^{n^2-n-6}\Pi+(f),$$

wo Π vom Grade $(n-2)(n^2-9)$. Daher wird schliesslich noch

$$M = \sigma H^3\Pi+(f).$$

Die Form Π hat Herr *Cayley* durch directe Herleitung ermittelt (Phil. Trans. 1859. pag. 193). —

Giessen, im August 1871.

Ueber das Problem der drei Körper.

(Von Herrn *Otto Hesse* in München.)

I.

Unter dem Probleme der drei Körper hat man Folgendes zu verstehen. Drei Körper ohne Ausdehnung, zusammengedrückt auf Punkte, aber mit gegebenen Massen erfüllt, seien aus gegebenen Anfangslagen in irgend welchen gegebenen Richtungen mit gegebenen Geschwindigkeiten in den leeren Raum hingeworfen. Auf diese Körper wirke nichts ein, als das *Newton*sche Gesetz, welches sagt, dass die Körper sich gegenseitig anziehen proportional ihren Massen und umgekehrt proportional den Quadraten ihrer Entfernungen. Es soll der Ort eines jeden Körpers für jede beliebige Zeit gefunden werden.

So ausgedrückt erscheint das Problem sehr complicirt. Denn es hängt, abgesehen von den Massen der Körper, ab von 18 Daten, von den 9 Coordinaten der drei Körper in den Anfangslagen und von den Richtungen und den Grössen ihrer anfänglichen Geschwindigkeiten, welche ebenfalls durch 9 Grössen ausgedrückt werden können. In *d'Alembert*schen Gleichungen ausgedrückt, welche die hervorgehobenen 18 Daten unberücksichtiget lassen, wird das Problem aber einfach. Es hängt nämlich, wenn man die *Newton*sche Kraft, mit welcher zwei Massen-Einheiten in der Einheit der Entfernung sich anziehen, als Kraft-Einheit nimmt, einzig und allein ab von den gegebenen Massen der drei Körper, also von 3 Daten. Und dieses ist im Vereine mit der Symmetrie des Problems wohl auch der Grund der grossen Anziehungs-Kraft, welche das Problem auf jeden Mathematiker ausübt.

Die *d'Alembert*schen Gleichungen sind Differentialgleichungen, von welchen man sich die Vorstellung zu machen hat, dass sie aus den 9 Gleichungen, welche das Problem vollständig lösen, dadurch hervorgegangen sind, dass man sie nach der Zeit t differentiirt und die 18 Daten eliminirt. Geht man daher von den 9 *d'Alembert*schen Differentialgleichungen aus, so sieht man, ohne die Gleichungen selbst aufzustellen, sogleich ein, dass man zur Lösung des Problems der drei Körper 18 Integrationen zu machen hat, welche die *d'Alembert*schen Vernachlässigungen wieder einbringen müssen.

Von den 18 Integralen, welche das Problem der drei Körper verlangt, kennt die analytische Mechanik nur 10. Sechs davon sind hergenommen aus dem Principe der Erhaltung des Schwerpunktes. Drei Integrale giebt das Princip der Erhaltung der Flächenräume und ein Integral die Erhaltung der lebendigen Kraft. Es fehlen darum bis zur Zeit noch acht Integrale. Denn das Princip des letzten Multiplicators von *Jacobi*, welches allerdings ein Integral aufstellen lehrt, macht Voraussetzungen, die man noch nicht erfüllen kann.

Auf ein neues Integral kann man dadurch kommen, dass man aus den 9 *d'Alembert*schen Differentialgleichungen, selbst mit Zuziehung der bekannten 10 Integrale, eine Differentialgleichung herstellt, welche für sich integrirbar ist; und in der That lassen sich vielfältige Zusammenstellungen der Art machen. Das daraus sich ergebende Integral wird aber nur dann ein neues sein, wenn es sich aus den bekannten 10 Integralen nicht zusammensetzen lässt.

Die Untersuchung, ob das gefundene Integral ein neues sei, kann unter Umständen wieder auf erhebliche Schwierigkeiten stossen, so dass man wünschen muss, solchen Untersuchungen ganz enthoben zu sein. In diesem Wunsche — wohl auch in der vergeblichen Hoffnung einem von den noch fehlenden acht Integralen auf die Spur zu kommen — habe ich die folgende Arbeit unternommen. Sie bezweckt nichts weiter, als die Lösung des Problems:

Problem.

Aus den Differentialgleichungen des Problemes der drei Körper und ihren bekannten Integralen symmetrisch gebildete Differentialgleichungen abzuleiten, von welchen eine jede auf eines von den bis zur Zeit noch fehlenden Integralen der drei Körper führen muss.

Auf dieses Problem bin ich geführt worden durch das Studium des Problemes zweier Körper, dessen Resultate niedergelegt sind in dem Anhange meiner Raumgeometrie 2. Auflage, Leipzig, Teubner 1869. Von dort aus will ich auch die leitenden Gedanken hernehmen, welche die nachfolgenden weiten Entwickelungen rechtfertigen sollen.

II.

Das Problem zweier Körper verlangt zu seiner vollständigen Lösung 12 Integrationen. Da die Principe der Mechanik 10 von diesen Integrationen leisten, so fehlen noch 2 Integrale.

Ich machte daher den Versuch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in symmetrischer Weise aus den sechs gegebenen Differentialgleichungen

und ihren zehn Integralen zusammen zu stellen, welche die beiden fehlenden Integrale umschliessen sollte. Der Versuch missglückte, wie man sogleich sehen wird.

Als engeres Problem zweier Körper kann man die Frage nach dem Radiusvector r, welcher die Körper von den Massen m_1 und m_2 und der Gesammtmasse $k^2 = M = m_1 + m_2$ verbindet, als Function der Zeit auffassen; dieses engere Problem führt, wie in dem Anhange der oben citirten Schrift nachgewiesen worden ist, auf die Differentialgleichung (15.) zurück:

$$r'' = -\frac{M}{r^2} + \frac{C^2}{r^3}.$$

Weiset man noch die aus den bekannten Principien der Mechanik hergenommene Constante C^2 der Integration zurück, so erhält man durch Differentiation und Elimination dieser Constante die Differentialgleichung dritter Ordnung, welche das engere Problem vollständig löset:

$$(1.)\quad 0 = (r^2)''' + \frac{M(r^2)'}{r^3}.$$

Die Form dieser Differentialgleichung, welche leicht verificirt werden kann, ist schon eine aus dem Probleme der drei Körper hergenommene.

Da die Differentialgleichung (1.) von keiner Integrationsconstante abhängig ist, so ist zu ihrer Herstellung auch keines von den drei Principien der Mechanik erforderlich, welches ein Integral liefert. Man kann daher die Behauptung aufstellen, dass, während zur Lösung des vollständigen Problemes zweier Körper 12 Integrationen erforderlich sind, das engere Problem nur 3 Integrationen verlangt.

Zwei erste Integrale des engeren Problemes sind bald gefunden:

$$(2.)\quad 4h = (r^2)'' - \frac{2M}{r},$$

$$(3.)\quad 2C^2 = r^2\left((r^2)'' + \frac{2M}{r}\right) - \tfrac{1}{4}(r^2)'(r^2)'.$$

Denn man hat:

$$(4.)\quad (r^2)''' + \frac{M(r^2)'}{r^3} = \frac{d}{dt}\left\{(r^2)'' - \frac{2M}{r}\right\},$$

$$(5.)\quad (r^2)''' + \frac{M(r^2)'}{r^3} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}\left\{r^2\left((r^2)'' + \frac{2M}{r}\right) - \tfrac{1}{4}(r^2)'(r^2)'\right\},$$

Gleichungen, welche später ihre Verwendung finden werden.

Die Bezeichnung der Integrationsconstanten h und C ist hier so gewählt worden, dass man in Uebereinstimmung mit der Bezeichnung in der citirten

Schrift sogleich erkennen soll, dass die beiden Integrale keine neuen sind. Die Integrationsconstante h ist dieselbe als in Gleichung (9.) und die Integrationsconstante C die Constante in der Gleichung (15.).

Eliminirt man aus den beiden angegebenen Integralgleichungen (2.) und (3.), deren Formen ebenfalls aus dem Probleme dreier Körper hergenommen sind, die Grösse $(r^2)''$, so erhält man die Differentialgleichung (13.) erster Ordnung:

$$(6.)\qquad r'r' = 2h+\frac{2M}{r}-\frac{C^2}{r^2}.$$

Ihr Integral ist allerdings eines von den beiden noch fehlenden Integralen des allgemeinen Problemes. Das zweite fehlende Integral ist aber bei der Uebertragung des allgemeinen Problemes in das engere vollständig entschlüpft. Das engere Problem des Radiusvectors umfasst also nicht die beiden fehlenden Integrale des allgemeinen Problemes, sondern nur ein Integral. Das andere Integral hat man ausserhalb des engeren Problemes zu suchen.

In der Trennung der beiden fehlenden Integrale des allgemeinen Problemes wird man einen glücklichen Umstand erblicken, wenn man dafür hält, dass es vorzuziehen sei, zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zu integriren, als eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Man kann sich sogar dem Glauben hingeben, dass diese Trennung der beiden noch fehlenden Integrale des Problemes zweier Körper ihre Auffindung und damit die vollständige Lösung des Problemes erheblich erleichtert hat.

III.

Das allgemeine Problem der drei Körper, welches 18 Integrationen erfordert, werden wir dadurch verengern, dass wir nur die Gestalt des Dreiecks kennen zu lernen verlangen, dessen Ecken die drei Körper bilden. Demnach soll die Gestalt des genannten Dreieckes zu einer beliebigen Zeit das engere Problem sein.

Es wird sich also darum handeln, die Differentialgleichungen zwischen den Radienvectoren und der Zeit aufzustellen, welche das engere Problem lösen. Von welcher Ordnung diese Differentialgleichungen sein werden, hängt davon ab, ob zu ihrer Aufstellung bekannte Integrale des allgemeinen Problemes verwendet werden dürfen, oder nicht.

Wenn wir den letzteren Fall im Auge behalten, dass die gesuchten drei Differentialgleichungen keine Integrationsconstanten enthalten sollen, so

lässt sich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit von ihnen voraussagen, dass jede derselben auf die Differentialgleichung (1.) zurückführen wird, wenn man eine der drei Massen verschwinden lässt. In dieser Voraussicht werden wir drei Differentialgleichungen, jede von der dritten Ordnung, aufzusuchen haben, welche das engere Problem der drei Körper ohne irgend eine Integration vollständig lösen. Diese Differentialgleichungen werden 9 Integrationen verlangen.

Da das allgemeine Problem mit Voraussetzung der bekannten Integrale nur 8 neue Integrationen verlangt, so sieht man, dass von den 9 erwähnten Integrationen wenigstens eine durch die bekannten Principien geleistet wird.

Wenn man aber erwägt, dass in dem engeren Probleme zweier Körper von den 3 verlangten Integrationen zwei Integrationen durch die Principe der Mechanik geleistet werden, so kann man voraussetzen, dass jene Principe auch 2 Integrale für das engere Problem dreier Körper hergeben werden, welche in die Integrale (2.) und (3.) übergehen, wenn man eine der drei Massen verschwinden lässt, so dass von den 9 Integrationen des allgemeinen Problemes nur noch 7 Integrationen für das engere Problem zu machen übrig bleiben.

Da in dem allgemeinen Probleme der drei Körper 8 Integrale noch fehlen, in dem engeren Probleme aber nur 7, so ergiebt sich hieraus, dass (wie in dem Probleme zweier Körper) bei dem Uebergange von dem allgemeinen Probleme zu dem engeren Probleme ein Integral verloren geht, welches dem letzteren ganz fremdartig ist.

Diese Reflexionen werden in dem Folgenden ihre Bestätigung finden. Wir beginnen die Ausführung mit der Aufstellung der *d'Alembert*schen Differentialgleichungen, welche das allgemeine Problem der drei Körper lösen.

IV.

Wenn man mit r, r_1, r_2 die Radienvectoren bezeichnet, welche je zwei Körper von den Massen m, m_1, m_2 verbinden, so ist U die Kräftefunction:

$$(7.)\qquad U = m m_1 m_2 \left\{\frac{1}{mr} + \frac{1}{m_1 r_1} + \frac{1}{m_2 r_2}\right\},$$

deren partielle Differentialquotienten in die Differentialgleichungen der Bewegung eingehen.

Bezeichnet man ferner mit ξ, η, ζ die Coordinaten des mit der Masse m erfüllten ersten Körpers zur Zeit t, die als die einzige unabhängige Variable

angesehen werden soll, und die entsprechenden Grössen für den zweiten und dritten Körper durch Anhängung der gebräuchlichen Indices 1 und 2, so hat man zur Lösung des Problemes folgende Differentialgleichungen:

$$(8.)\quad \begin{cases} m\xi'' = \dfrac{dU}{d\xi}, \\ m\eta'' = \dfrac{dU}{d\eta}, \\ m\zeta'' = \dfrac{dU}{d\zeta}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen repräsentiren ein ganzes System von 9 Gleichungen, welches man vervollständigt dadurch, dass man der Masse m und den Coordinaten ξ, η, ζ die Indices 1 oder 2 beigiebt.

Da in die Kräftefunction, wenn man sie durch die Coordinaten der drei Körper ausdrückt, nur die Differenzen der Coordinaten eingehen, gleich wie in die rechten Theile der Differentialgleichungen (8.), deren Einfachheit nur auf der Erfindung der Kräftefunction beruht, so erscheint es zur Erzielung grösserer Einfachheit angemessen, an Stelle der Coordinaten der drei Körper ihre Differenzen x, y, z einzuführen. Setzt man daher:

$$(9.)\quad \begin{cases} x = \xi_1 - \xi_2, & x_1 = \xi_2 - \xi, & x_2 = \xi - \xi_1, \\ y = \eta_1 - \eta_2, & y_1 = \eta_2 - \eta, & y_2 = \eta - \eta_1, \\ z = \zeta_1 - \zeta_2, & z_1 = \zeta_2 - \zeta, & z_2 = \zeta - \zeta_1, \end{cases}$$

so wird:

$$\frac{dU}{d\xi} = \left\{\frac{m_2 x_1}{r_1^3} - \frac{m_1 x_2}{r_2^3}\right\},$$

und aus der ersten Gleichung (8.) ergeben sich auf Grund der zu beachtenden Symmetrie zwischen den drei Körpern auf diese Weise die Differentialgleichungen:

$$\xi'' = \frac{m_2 x_1}{r_1^3} - \frac{m_1 x_2}{r_2^3}, \quad \xi_1'' = \frac{m x_2}{r_2^3} - \frac{m_2 x}{r^3}, \quad \xi_2'' = \frac{m_1 x}{r^3} - \frac{m x_1}{r_1^3}.$$

Zieht man die letzte Gleichung von der vorhergehenden ab, so erhält man in Berücksichtigung von (9.) die Differentialgleichung:

$$x'' = -M\frac{x}{r^3} + m\left\{\frac{x}{r^3} + \frac{x_1}{r_1^3} + \frac{x_2}{r_2^3}\right\},$$

wenn man mit M die Summe der Massen der drei Körper bezeichnet, wie folgt:

$$(10.)\quad M = m + m_1 + m_2.$$

Wegen der Symmetrie der Coordinaten eines Körpers gehen aus der zuletzt angegebenen Differentialgleichung folgende hervor:

$$(11.)\quad \begin{cases} x'' = -M\dfrac{x}{r^3}+m\left\{\dfrac{x}{r^3}+\dfrac{x_1}{r_1^3}+\dfrac{x_2}{r_2^3}\right\}, \\ y'' = -M\dfrac{y}{r^3}+m\left\{\dfrac{y}{r^3}+\dfrac{y_1}{r_1^3}+\dfrac{y_2}{r_2^3}\right\}, \\ z'' = -M\dfrac{z}{r^3}+m\left\{\dfrac{z}{r^3}+\dfrac{z_1}{r_1^3}+\dfrac{z_2}{r_2^3}\right\}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen repräsentiren wieder ein ganzes System von 9 Differentialgleichungen, welches man erhält durch Vertauschung der drei Indices 0, 1, 2, von welchen der Index 0 der Einfachheit wegen fortgelassen ist.

Die Differentialgleichungen (11.) würden wieder 18 Integrationen verlangen, wenn man nicht auf Grund von (9.) die Relationen hätte:

$$(12.)\quad \begin{cases} x+x_1+x_2 = 0, \\ y+y_1+y_2 = 0, \\ z+z_1+z_2 = 0. \end{cases}$$

Durch diese Relationen wird die Zahl 18 der Integrationen, welche die Differentialgleichungen (8.) des allgemeinen Problemes verlangten, verringert auf 12 Integrationen, welche das durch Einführung der Differenzen der Coordinaten schon beschränkte Problem (11.) noch zu leisten hat.

Von diesen 12 Integrationen vollführen die bekannten Principe der Mechanik vier, welche aufzusuchen unsre nächste Aufgabe sein wird.

V.

Setzen wir, um das System Gleichungen (11.) abzukürzen:

$$(13.)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = \dfrac{x}{r^3}+\dfrac{x_1}{r_1^3}+\dfrac{x_2}{r_2^3}, \\ \mathrm{B} = \dfrac{y}{r^3}+\dfrac{y_1}{r_1^3}+\dfrac{y_2}{r_2^3}, \\ \mathrm{C} = \dfrac{z}{r^3}+\dfrac{z_1}{r_1^3}+\dfrac{z_2}{r_2^3}, \end{cases}$$

multipliciren hierauf die Gleichungen (11.) der Reihe nach mit x', y', z' und addiren, so erhalten wir:

$$(14.)\quad x'x''+y'y''+z'z'' = -M\frac{r'}{r^2}+m\{\mathrm{A}x'+\mathrm{B}y'+\mathrm{C}z'\}.$$

Dividiren wir diese Gleichung durch m und nehmen die Summe, so verschwinden, weil man auf Grund von (12.) hat:

$$(15.)\quad \begin{cases} x'+x'_1+x'_2 = 0, \\ y'+y'_1+y'_2 = 0, \\ z'+z'_1+z'_2 = 0, \end{cases}$$

die letzten Glieder, und wir erhalten:

$$(16.)\quad \Sigma\frac{(x'x''+y'y''+z'z'')}{m} = -M\Sigma\frac{r'}{mr^2}.$$

Durch Differentiation von (7.) erhalten wir die Gleichung:

$$(17.)\quad \frac{dU}{dt} = -mm_1m_2\Sigma\frac{r'}{mr^2}.$$

Auf Grund der Gleichung (17.) stellt sich die Gleichung (16.) nun so dar:

$$(18.)\quad \frac{mm_1m_2}{2}\frac{d}{dt}\Sigma\frac{(x'x'+y'y'+z'z')}{m} = M\frac{dU}{dt},$$

und integrirt:

$$(19.)\quad \frac{mm_1m_2}{2}\Sigma\frac{(x'x'+y'y'+z'z')}{m} = MU+h.$$

Es entspricht dieses Integral demjenigen Integrale, welches in dem allgemeinen Probleme (8.) aus dem Principe der Erhaltung der lebendigen Kraft hervorgeht, wenn es auch nicht mit demselben identisch ist.

Um die Integrale zu erhalten, welche in ähnlicher Art den Flächensätzen entsprechen, multipliciren wir die letzte Gleichung (11.) mit y, ziehen die mit z multiplicirte vorletzte Gleichung ab und dividiren durch m. Alsdann wird:

$$\frac{yz''-y''z}{m} = y\text{C}-z\text{B}.$$

Auf beiden Seiten der Gleichung die Summe genommen ergiebt sich mit Rücksicht auf (12.):

$$\Sigma\frac{(yz''-y''z)}{m} = 0,$$

eine Differentialgleichung, deren erstes Integral ist:

$$\Sigma\frac{(yz'-y'z)}{m} = \alpha.$$

Auf diese Weise ergeben sich aus dem Systeme Differentialgleichungen (11.) die gesuchten drei Integrale:

$$(20.)\quad \begin{cases} \alpha = \Sigma \dfrac{(yz'-y'z)}{m}, \\ \beta = \Sigma \dfrac{(zx'-z'x)}{m}, \\ \gamma = \Sigma \dfrac{(xy'-x'y)}{m}. \end{cases}$$

Die aufgeführten Integrale (19.) und (20.) sind keine neuen Integrale, sondern zusammengesetzt aus den bekannten zehn Integralen des allgemeinen Problemes (8.). Es bleiben darum auch in dem beschränkten Probleme (11.) noch acht Integrationen zu machen übrig.

Wenn es nun gelingt durch geschickte Verbindung der Differentialgleichungen (11.) mit den Gleichungen (12.), (15.), (19.), (20.) eine Differentialgleichung herzustellen, welche für sich integrirbar ist, so wird man wieder nicht wissen können, ob das Integral derselben eines von den noch fehlenden acht Integralen ist. Voraussichtlich wird das entdeckte Integral kein neues sein.

Diese Erwägungen haben auf das am Ende des ersten Paragraphen ausgesprochene Problem geführt. Die Lösung desselben beruht auf der Einführung einfacher Zeichen für gewisse symmetrisch gebildete Functionen, welche demnächst vorgeführt werden sollen.

VI.

Das in dem dritten Paragraphen bezeichnete engere Problem der drei Körper verlangt die Elimination sämmtlicher Variablen aus den Differentialgleichungen (11.) mit Ausnahme der Radienvectoren und ihrer Differentialquotienten. Bei dieser Gelegenheit drängen sich symmetrisch gebildete Functionen der zu eliminirenden Variablen auf, von welchen in erster Linie diejenigen Functionen hervorgehoben werden sollen, welche sich allein durch die Radienvectoren (nicht durch ihre Differentialquotienten) ausdrücken lassen. Dahin gehören die Functionen:

$$(21.)\quad xx+yy+zz=r^2,\quad x_1x_1+y_1y_1+z_1z_1=r_1^2,\quad x_2x_2+y_2y_2+z_2z_2=r_2^2,$$

für welche wir respective die neuen Zeichen wählen:

$$(22.)\quad [00]=r^2,\quad [11]=r_1^2,\quad [22]=r_2^2.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (12.) der Reihe nach mit x, y, z und addirt, so erhält man in Verfolg der eingeführten neuen Bezeichnung

für symmetrisch gebildete Functionen wie $xx_1+yy_1+zz_1=[01]$ die Gleichung

$$[00]+[01]+[02] \;=\; 0,$$

woraus denn wieder das System Gleichungen hervorgeht:

$$(23.)\quad \begin{cases} [00]+[01]+[02] \;=\; 0, \\ [10]+[11]+[12] \;=\; 0, \\ [20]+[21]+[22] \;=\; 0, \end{cases}$$

welche Gleichungen beweisen, dass die neu hinzugekommenen symmetrischen Functionen sich durch die Radienvectoren ausdrücken lassen, wie folgt:

$$(24.)\quad \begin{cases} [12] \;=\; \tfrac{1}{2}\{r^2-r_1^2-r_2^2\}, \\ [20] \;=\; \tfrac{1}{2}\{r_1^2-r_2^2-r^2\}, \\ [01] \;=\; \tfrac{1}{2}\{r_2^2-r^2-r_1^2\}. \end{cases}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (11.) der Reihe nach mit x, y, z und addirt, so erhält man, wenn man setzt: $xx''+yy''+zz''=[0''0]=\text{R}$.

$$(25.)\quad [0''0]=\text{R}=-\frac{M}{r}+m\left\{\frac{[00]}{r^3}+\frac{[01]}{r_1^3}+\frac{[02]}{r_2^3}\right\}.$$

An Stelle des hier ganz berechtigten Zeichens $[0''0]$ wählen wir jedoch aus Rücksicht auf die im nächsten Paragraphen nachfolgenden Zeichen für symmetrisch gebildete Functionen das Zeichen R, um mit demselben anzudeuten, dass R sowie R_1 und R_2 Functionen seien nur der Radienvectoren wie folgt:

$$(26.)\quad \begin{cases} \text{R} \;=\; -\dfrac{M}{r}+m\left\{\dfrac{[00]}{r^3}+\dfrac{[01]}{r_1^3}+\dfrac{[02]}{r_2^3}\right\}, \\ \text{R}_1 = -\dfrac{M}{r_1}+m_1\left\{\dfrac{[10]}{r^3}+\dfrac{[11]}{r_1^3}+\dfrac{[12]}{r_2^3}\right\}, \\ \text{R}_2 = -\dfrac{M}{r_2}+m_2\left\{\dfrac{[20]}{r^3}+\dfrac{[21]}{r_1^3}+\dfrac{[22]}{r_2^3}\right\}. \end{cases}$$

Es wird sich später zeigen, dass die in (26.) mit den Einzelnmassen multiplicirten Ausdrücke der Radienvectoren berufen sind in die abzuleitenden Differentialgleichungen einzutreten. Aus diesem Grunde führen wir sie ein mit den Zeichen:

$$(27.)\quad \begin{cases} P \;=\; \dfrac{[00]}{r^3}+\dfrac{[01]}{r_1^3}+\dfrac{[02]}{r_2^3}, \\ P_1 = \dfrac{[10]}{r^3}+\dfrac{[11]}{r_1^3}+\dfrac{[12]}{r_2^3}, \\ P_2 = \dfrac{[20]}{r^3}+\dfrac{[21]}{r_1^3}+\dfrac{[22]}{r_2^3}. \end{cases}$$

Differentiirt man diese Ausdrücke nach der Zeit, nicht total, sondern nur in so ferne dieselbe in den Zählern der Brüche enthalten ist, aus welchen die Ausdrücke bestehen, so erhält man wieder Ausdrücke, welche in die abzuleitenden Differentialgleichungen eingehen. Wir führen dieselben schon hier ein mit den Bezeichnungen:

$$(28.)\quad \begin{cases} Q \;=\; \dfrac{[00]'}{r^3}+\dfrac{[01]'}{r_1^3}+\dfrac{[02]'}{r_2^3}, \\ Q_1 \;=\; \dfrac{[10]'}{r^3}+\dfrac{[11]'}{r_1^3}+\dfrac{[12]'}{r_2^3}, \\ Q_2 \;=\; \dfrac{[20]'}{r^3}+\dfrac{[21]'}{r_1^3}+\dfrac{[22]'}{r_2^3}. \end{cases}$$

Auf Grund von (23.) hat man nun:

$$(29.)\quad P+P_1+P_2 \;=\; 0,$$

$$(30.)\quad Q+Q_1+Q_2 \;=\; 0.$$

Und es lassen sich die Gleichungen (26.) kürzer so wiedergeben:

$$(31.)\quad \begin{cases} \mathrm{R} \;=\; -\dfrac{M}{r}+m\,P, \\ \mathrm{R}_1 \;=\; -\dfrac{M}{r_1}+m_1 P_1, \\ \mathrm{R} \;=\; -\dfrac{M}{r_2}+m_2 P_2. \end{cases}$$

Mit den durch die neuen Zeichen dargestellten symmetrischen Functionen, welche sich durch die Radienvectoren ausdrücken lassen, treten zum Zwecke der Elimination noch andere symmetrisch gebildete Functionen auf, die sich durch die Radienvectoren und deren Differentialquotienten ausdrücken lassen. Diese Functionen sollen demnächst vorgeführt werden.

VII.

Differentiirt man die Gleichungen (22.), so erhält man:

$$(32.)\quad [0'0]=\tfrac{1}{2}(r^2)',\quad [1'1]=\tfrac{1}{2}(r_1^2)',\quad [2'2]=\tfrac{1}{2}(r_2^2)'.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (12.) der Reihe nach mit x', y', z' und addirt, oder multiplicirt man die Gleichungen (15.) der Reihe nach mit x, y, z und addirt, und setzt dieses Verfahren fort, so erhält man:

$$(33.)\quad \begin{cases} [0'1]+[0'2]=-\tfrac{1}{2}(r^2)', & [1'0]+[2'0]=-\tfrac{1}{2}(r^2)', \\ [1'2]+[1'0]=-\tfrac{1}{2}(r_1^2)', & [2'1]+[0'1]=-\tfrac{1}{2}(r_1^2)', \\ [2'0]+[2'1]=-\tfrac{1}{2}(r_2^2)', & [0'2]+[1'2]=-\tfrac{1}{2}(r_2^2)'. \end{cases}$$

Diese sechs Gleichungen reichen nicht aus, um die sechs bezeichneten symmetrischen Functionen der Coordinaten durch die Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren auszudrücken, weil die Summe der drei ersten Gleichungen gleich der Summe der drei letzten ist. Zu ihrem Ausdrucke bedarf es sogar der dritten Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren, wie es sich in dem folgenden Paragraphen zeigen wird.

Bemerkt man aber, dass man durch Subtraction der nebeneinander stehenden Gleichungen (33.) erhält:

$$(34.) \qquad [1'0]-[0'1] = [2'1]-[1'2] = [0'2]-[2'0],$$

so ist ersichtlich, dass durch Einführung einer neuen symmetrischen Function L der Coordinaten:

$$(35.) \qquad 2L = [1'0]-[0'1]$$

die genannten sechs symmetrischen Functionen durch die ersten Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren und durch die neue Function L sich ausdrücken lassen, wie folgt:

$$(36.) \qquad \begin{cases} [1'0] = \frac{1}{2}[10]'+L, & [0'1] = \frac{1}{2}[01]'-L, \\ [2'1] = \frac{1}{2}[21]'+L, & [1'2] = \frac{1}{2}[12]'-L, \\ [0'2] = \frac{1}{2}[02]'+L, & [2'0] = \frac{1}{2}[20]'-L. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen oder aus (34.) erkennt man sogleich, dass die Function L eine alternirende Function der drei Körper ist. Denn vertauscht man zwei Körper mit einander, so bleibt L ungeändert, nimmt aber das entgegengesetzte Vorzeichen an.

Die alternirende Eigenschaft der Function L lässt sich durchsichtiger noch an ihrem Differentialquotienten nachweisen, der durch die Radienvectoren selbst ausgedrückt werden kann.

Differentiirt man nämlich die Gleichung (35.) nach der Zeit, so erhält man:

$$2L' = [1''0]-[0''1].$$

Auf Grund von (11.) hat man:

$$[0''1] = -M\frac{[01]}{r^3}+m\left\{\frac{[01]}{r^3}+\frac{[11]}{r_1^3}+\frac{[21]}{r_2^3}\right\},$$

$$[1''0] = -M\frac{[01]}{r_1^3}+m\left\{\frac{[00]}{r^3}+\frac{[01]}{r_1^3}+\frac{[02]}{r_2^3}\right\}.$$

Zieht man nun die erste Gleichung von der zweiten ab und giebt den

Grössen [00] und [11] ihre Werthe aus (23.), so erhält man:

$$(37.)\quad 2L' = m[12]\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)+m_1[20]\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{r^3}\right)+m_2[01]\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_1^3}\right).$$

Differentiirt man die erste Gleichung (21.) zwei Mal, so erhält man mit Berücksichtigung von (25.) und (31.) die Gleichung:

$$(38.)\quad x'x'+y'y'+z'z' = \tfrac{1}{2}(r^2)''+\frac{M}{r}-mP.$$

Hieraus ergeben sich nun die Ausdrücke der symmetrischen Functionen:

$$(39.)\quad \begin{cases} [0'0'] = \tfrac{1}{2}(r^2)''+\dfrac{M}{r}-mP, \\ [1'1'] = \tfrac{1}{2}(r_1^2)''+\dfrac{M}{r_1}-m_1P_1, \\ [2'2'] = \tfrac{1}{2}(r_2^2)''+\dfrac{M}{r_2}-m_2P_2. \end{cases}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (15.) respective mit x', y', z', addirt und setzt dieses Verfahren fort, so erhält man:

$$(40.)\quad \begin{cases} [0'0']+[0'1']+[0'2'] = 0, \\ [1'0']+[1'1']+[1'2'] = 0, \\ [2'0']+[2'1']+[2'2'] = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen beweisen, dass auch die symmetrischen Functionen von der Form [0'1'] sich durch die Quadrate der Radienvectoren und ihre Differentialquotienten bis zur zweiten Ordnung ausdrücken lassen. Denn aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$(41.)\quad \begin{cases} [1'2'] = \tfrac{1}{2}\{[0'0']-[1'1']-[2'2']\}, \\ [2'0'] = \tfrac{1}{2}\{[1'1']-[2'2']-[0'0']\}, \\ [0'1'] = \tfrac{1}{2}\{[2'2']-[0'0']-[1'1']\}. \end{cases}$$

Stellen wir nun die Resultate dieses und des vorhergehenden Paragraphen kurz zusammen, so lässt sich dieses sagen, dass alle durch die neue Bezeichnung eingeführten symmetrischen Functionen sich ausdrücken lassen durch die Radienvectoren und ihre Differentialquotienten bis zur zweiten Ordnung mit Ausnahme der Functionen von der Form [0'1], welche, abgesehen von den Radienvectoren und ihren ersten Differentialquotienten, in (36.) abhängig gemacht worden sind allein von der durch Gleichung (35.) definirten alternirenden Function L.

Diese Function L lässt sich nicht mehr ausdrücken durch die Radienvectoren und ihre Differentialquotienten niederer Ordnung. Wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden, bedarf es dazu noch der Differentialquotienten der dritten Ordnung.

Aber an Stelle eines einzigen Ausdruckes für die alternirende Function L wird die Symmetrie sogleich drei verschiedene Ausdrücke ergeben, aus deren Gleichsetzung zwei Differentialgleichungen des engeren Problemes hervorgehen von der dritten Ordnung und zwar ohne Integration.

VIII.

Wenn man die Gleichung (38.) differentiirt und durch 2 dividirt, so erhält man:

$$(42.) \qquad x'x''+y'y''+z'z'' = \tfrac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''+\frac{2M}{r}\right\}-\frac{m}{2}P',$$

eine Gleichung, deren linker Theil gleich ist dem linken Theile der Gleichung (14.). Setzt man die rechten Theile der Gleichungen einander gleich, so wird:

$$-\frac{Mr'}{r^3}+m\{\mathrm{A}x'+\mathrm{B}y'+\mathrm{C}z'\} = \tfrac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''+\frac{2M}{r}\right\}-\frac{m}{2}P',$$

und wenn man für A, B, C die Werthe setzt aus (13.):

$$-\frac{Mr'}{r^3}+m\left\{\frac{[0'0]}{r^3}+\frac{[0'1]}{r_1^3}+\frac{[0'2]}{r_2^3}\right\} = \tfrac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''+\frac{2M}{r}\right\}-\frac{m}{2}P'.$$

oder da man hat: $-\frac{Mr'}{r^3} = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{\frac{4M}{r}\right\}$ und $[0'0] = \frac{1}{2}[00]'$, so geht die letzte Gleichung über in:

$$\frac{[0'1]}{r_1^3}+\frac{[0'2]}{r_2^3} = \frac{1}{4m}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}-\tfrac{1}{2}P'-\tfrac{1}{2}\frac{[00]'}{r^3}.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe von $[0'1]$ und $[0'2]$ aus (36.) ein, so erhält man:

$$-L\left\{\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right\} = \frac{1}{4m}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}-\tfrac{1}{2}P'-\tfrac{1}{2}\left\{\frac{[00]'}{r^3}+\frac{[01]'}{r_1^3}+\frac{[02]'}{r_2^3}\right\}.$$

Multiplicirt man mit -2, so wird mit Rücksicht auf (28.):

$$(43.) \qquad 2L\left\{\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right\} = -\frac{1}{2m}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}+P'+Q.$$

Eine andere bemerkenswerthe Gestalt erhält diese Gleichung, wenn man die Gleichungen (4.) und (5.) benutzt.

Aus der Gleichung (43.) geht nun ein System von drei Gleichungen hervor durch cyclische Vertauschung der Indices 0, 1, 2. Dieses System lässt sich sehr einfach wiedergeben, wenn wir die Bezeichnung einführen:

$$(44.)\qquad v=\frac{n}{m}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}+\frac{n_1}{m_1}\left\{(r_1^2)''-\frac{2M}{r_1}\right\}+\frac{n_2}{m_2}\left\{(r_2^2)''-\frac{2M}{r_2}\right\},$$

bei welcher Gelegenheit wir zu künftigem Gebrauch gleich auf einen ähnlich gebildeten Ausdruck $\mathfrak{V}$, ebenfalls der zweiten Ordnung, aufmerksam machen:

$$(45.)\qquad \mathfrak{V}=\frac{1}{m}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}+\frac{1}{m_1}\left\{(r_1^2)''-\frac{2M}{r_1}\right\}+\frac{1}{m_2}\left\{(r_2^2)''-\frac{2M}{r_2}\right\}.$$

Man hat demnach folgende drei Ausdrücke für die alternirende Function L:

$$(46.)\qquad \begin{cases} 2L\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dn\,dt}+P'+Q, \\ 2L\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dn_1\,dt}+P_1'+Q_1, \\ 2L\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_1^3}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dn_2\,dt}+P_2'+Q_2. \end{cases}$$

Die beiden letzten Ausdrücke beweisen, dass L nicht unendlich wird, wenn man die Masse m gleich Null setzt. Der erste Ausdruck von L in (46.) oder (43.) wird nur scheinbar unendlich, wenn man m gleich Null setzt, denn in diesem Falle reducirt sich das Problem auf das Problem zweier Körper, und es verschwindet nach (1.) und (4.) auch der Zähler jenes Bruches, dessen Nenner m ist. Der erste Ausdruck für L wird demnach unbestimmt, wenn man m gleich Null setzt.

Die angegebenen Ausdrücke (46.) sind unsymmetrisch. Um einen symmetrischen Ausdruck für das Product zweier alternirenden Functionen zu erhalten, von welchen die eine L ist, multipliciren wir die Gleichungen (46.) der Reihe nach mit $m[12]$, $m_1[20]$, $m_2[01]$ und addiren. In Berücksichtigung von (37.) erhalten wir dann:

$$(47.)\qquad \begin{cases} 4LL' = -\frac{m}{2}[12]\frac{d^2v}{dn\,dt}-\frac{m_1}{2}[20]\frac{d^2v}{dn_1\,dt}-\frac{m_2}{2}[01]\frac{d^2v}{dn_2\,dt} \\ \qquad +m[12]\{P'+Q\}+m_1[20]\{P_1'+Q_1\}+m_2[01]\{P_2'+Q_2\}. \end{cases}$$

Um nun die alternirende Function L in symmetrischer Weise aus den Gleichungen (46.) zu eliminiren, addiren wir die Gleichungen und erhalten auf Grund von (29.) und (30.):

$$0=\frac{d^2v}{dn\,dt}+\frac{d^2v}{dn_1\,dt}+\frac{d^2v}{dn_2\,dt},$$

Da aber nach (44.) und (45.) ist:

$$\mathfrak{V} = \frac{dv}{dn} + \frac{dv}{dn_1} + \frac{dv}{dn_2},$$

so hat man die Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen den Radienvectoren und der Zeit:

$$(48.) \qquad 0 = \frac{d\mathfrak{V}}{dt}.$$

Die zweite gesuchte Differentialgleichung ebenfalls der dritten Ordnung erhält man, wenn man die Gleichungen (46.) respective mit $\frac{2}{r^3}$, $\frac{2}{r_1^3}$, $\frac{2}{r_2^3}$ multiplicirt und addirt:

$$(49.) \qquad \frac{1}{r^3}\frac{d^2v}{dn\,dt} + \frac{1}{r_1^3}\frac{d^2v}{dn_1\,dt} + \frac{1}{r_2^3}\frac{d^2v}{dn_2\,dt} = \frac{2}{r^3}\{P'+Q\} + \frac{2}{r_1^3}\{P_1'+Q_1\} + \frac{2}{r_2^3}\{P_2'+Q_2\}.$$

Als Controlle der vorangegangenen Entwickelungen mag die Bemerkung dienen, dass sowohl die Gleichung (48.) als (49.) übergeht in die Differentialgleichung (1.), wenn man eine der Massen gleich Null setzt.

Die beiden letzten Differentialgleichungen dritter Ordnung haben sich ergeben ohne Integration. Sie lassen sich daher betrachten als zweckmässige Zusammenstellungen der Differentialgleichungen des allgemeinen Problemes.

Es bleibt demnach noch übrig eine dritte Differentialgleichung zwischen den Radienvectoren und der Zeit ebenfalls der dritten Ordnung ohne Integration aufzusuchen.

IX.

Es wird Vortheil bringen den bis dahin eingeschlagenen Weg zu verlassen und von wirklichen Integralen des allgemeinen Problemes auszugehen, denn wir haben es ja in der Gewalt durch Differentiation die Integrationsconstanten wieder verschwinden zu lassen.

Zur Herleitung der dritten und letzten Differentialgleichung des engeren Problemes werden wir uns der drei Integrale (20.) mit den willkürlichen Constanten α, β, γ, oder, präciser ausgedrückt, des einen Integrales bedienen, dessen Integrationsconstante C sich aus den angegebenen zusammensetzt wie folgt:

$$(50.) \qquad C^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

Wir haben demnach auf Grund von (20.):

$$(51.) \qquad C^2 = \left(\Sigma\frac{(yz'-y'z)}{m}\right)^2 + \left(\Sigma\frac{(zx'-z'x)}{m}\right)^2 + \left(\Sigma\frac{(xy'-x'y)}{m}\right)^2.$$

Ordnet man diese Gleichung nach den umgekehrten Quadraten und Producten der Massen, so sieht man, dass der Coefficient von $\frac{1}{m^2}$ in der Entwickelung ist:

$$(yz'-y'z)^2+(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2,$$

und dass der Coefficient von $\frac{2}{mm_1}$ ist:

$$(yz'-y'z)(y_1z_1'-y_1'z_1)+(zx'-z'x)(z_1x_1'-z_1'x_1)+(xy'-x'y)(x_1y_1'-x_1'y_1)$$

und so ferner.

Dieses sind Formen, für welche die Determinanten-Theorie für unsere Zwecke passendere Formen einführen lehrt, nämlich für den ersten Ausdruck folgenden:

$$(xx+yy+zz)(x'x'+y'y'+z'z')-(xx'+yy'+zz')^2$$

und für den zweiten:

$$(xx_1+yy_1+zz_1)(x'x_1'+y'y_1'+z'z_1')-(x'x_1+y'y_1+z'z_1)(xx_1'+yy_1'+zz_1').$$

Machen wir nun von den für die symmetrischen Functionen eingeführten Zeichen Gebrauch, so haben wir:

$$(52.)\quad\begin{cases}(yz'-y'z)^2+(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2=[00][0'0']-[0'0]^2,\\(yz'-y'z)(y_1z_1'-y_1'z_1)+(zx'-z'x)(z_1x_1'-z_1'x_1)+(xy'-x'y)(x_1y_1'-x_1'y_1)\\\qquad=[01][0'1']-[0'1][1'0]\end{cases}$$

und so weiter.

Man hat demnach folgende Entwickelung der Gleichung (51.):

$$C^2=\frac{1}{m^2}\{[00][0'0']-[0'0]^2\}+\frac{2}{mm_1}\{[01][0'1']-[0'1][1'0]\}+\cdots$$

Setzt man in dieselbe die Werthe von $[0'1]$, $[1'0]$ etc. aus (36.) und multiplicirt mit -1, so erhält man:

$$(53^*.)\quad\begin{cases}\dfrac{2M}{mm_1m_2}L^2-C^2\\=-\dfrac{1}{m^2}\{[00][0'0']-[0'0]^2\}-\dfrac{2}{mm_1}\{[01][0'1']-[01]'[10]'\}-\cdots\end{cases}$$

Dieses würde, da nach (47.) L ein Ausdruck der dritten Ordnung ist, die gesuchte dritte Differentialgleichung zwischen den Radienvectoren und der Zeit sein, wenn sie nicht die Constante C^2 der Integration enthielte. Um aus ihr die verlangte Differentialgleichung des engeren Problemes ohne willkürliche Constante abzuleiten, differentiiren wir dieselbe nach der Zeit:

$$(54.)\quad \begin{cases} \dfrac{4M}{mm_1m_2}LL' \\ = -\dfrac{1}{m^2}\dfrac{d}{dt}\{[00][0'0']-[0'0]^2\}-\dfrac{2}{mm_1}\dfrac{d}{dt}\{[01][0'1']-[01]'[10]'\}-\cdots \end{cases}$$

Da der rechte Theil der Gleichung (53*.) von der zweiten Ordnung ist, so wird der rechte Theil der Gleichung (54.) von der dritten Ordnung. Die Gleichung selbst ist von der dritten Ordnung, weil nach (47.) das symmetrische Product LL' von der dritten Ordnung ist.

Auch hier wird man bemerken, dass die Differentialgleichung (54.) übergeht in (1.), wenn man eine der Massen gleich Null setzt.

Die vollständige Lösung des Dreieck-Problemes der drei Körper beruht demnach auf der Integration der drei Differentialgleichungen (48.), (49.), (54.) dritter Ordnung, zu deren Aufstellung es keiner Integration der Differentialgleichungen des allgemeinen Problemes bedurfte.

Wenn man die Principe der Mechanik walten lässt, welche Integrale liefern, so liegen zwei Integrale des Systems von drei Differentialgleichungen des engeren Problemes zu Tage, nämlich das aus (48.) hervorgehende Integral von der zweiten Ordnung:

$$(55^*.)\qquad 4h = \mathfrak{V}$$

mit der willkürlichen Constante h, und die Differentialgleichung (53*.) vorläufig von der dritten Ordnung, mit der willkürlichen Constante C.

Da die Differentialgleichungen (48.), (49.), (54.) sämmtlich linear sind in Rücksicht auf die dritten Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren, so kann man letztere leicht ausdrücken durch die Differentialquotienten niederer Ordnung. Setzt man ihre Werthe in den Ausdruck (47.) für L, so wird derselbe von der zweiten Ordnung und die Differentialgleichung (53*.) selbst von der zweiten Ordnung. Diese Differentialgleichung (53*.) lässt sich demnach betrachten als ein Integral der drei Differentialgleichungen des engeren Problemes mit der willkürlichen Constante C der Integration von der zweiten Ordnung.

Um die Richtigkeit der beiden Integralgleichungen (55*.) und (53*.) zu prüfen, setzen wir für h und C respective $\frac{h}{m}$ und $\frac{C}{m}$ und lassen m verschwinden. Die erstere Gleichung geht dann über in die Gleichung (2.), die letztere in Berücksichtigung des im vorhergehenden Paragraphen ausdrücklich aufgeführten Umstandes, dass L nicht unendlich wird, wenn $m=0$, in die Gleichung (3.).

Die durchgeführte Untersuchung fassen wir nun kurz zusammen in dem Theoreme:

Theorem.

Wenn man das allgemeine Problem der drei Körper beschränkt auf die Gestalt des Dreieckes, dessen Ecken die drei Körper bilden, so hängt die Lösung des engeren Problemes ab von drei Differentialgleichungen der dritten Ordnung (48.), (49.), (54.). *Wenn man aber die Principe der Mechanik voraussetzt, welche Integrale liefern, so lässt sich dasselbe abhängig machen von zwei Differentialgleichungen* (55*.), (53*.) *der zweiten Ordnung und einer Differentialgleichung* (49.) *dritter Ordnung.*

Anmerkung. Das Theorem ist bekannt durch eine von *Lagrange* verfasste und von der Pariser Akademie gekrönte Preis-Schrift: „Essai d'une nouvelle Méthode pour résoudre le Problème des trois Corps" aus dem Jahre 1772. Da der Verfasser von vorne herein, wenn auch mit sichtbarem Widerstreben, die Symmetrie der Aufgabe fallen liess, so konnte er kaum zu den, den Umständen nach einfachen, Resultaten gelangen, welche vorliegen. In späteren Jahren ist *Lagrange* nicht wieder auf sein Problem zurückgekommen. Es ist dieses um so mehr zu beklagen, als gerade er den Gebrauch der Symmetrie in einem Grade ausgebildet hat, wie kein Mathematiker vor ihm.

München, 1871.

Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

Hamilton hat in seiner Abhandlung *on a general method in dynamics* *) bemerkt, dass die Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von freien Massenpunkten, bei dem die bewegenden Kräfte auf eine Kräftefunction zurückgeführt werden können, aus der Forderung hervorgehen, dass die erste Variation eines von ihm bezeichneten Integrals gleich Null werde. Das Element dieses Integrals ist gleich dem Aggregate aus der halben Summe der lebendigen Kräfte des Systems und aus der Kräftefunction, multiplicirt in das Zeitelement; die Integration erstreckt sich von einem beliebigen festen Anfangswerthe bis zu einem beliebigen festen Endwerthe der Zeit; bei der Variation werden die Coordinaten der Massenpunkte in der betreffenden Anfangslage und Endlage als unveränderlich betrachtet. Wie man leicht erkennt, bleibt diese Darstellung des mechanischen Problems auch dann noch gültig, wenn zwischen den Coordinaten der einzelnen Massenpunkte Bedingungsgleichungen vorhanden sind, welche die Zeit nicht enthalten. Alsdann hat man die Coordinaten der Massenpunkte durch eine angemessene Zahl von unabhängigen Variabelen auszudrücken, und die halbe Summe der lebendigen Kräfte des Systems in eine quadratische Form von den nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der unabhängigen Variabelen zu verwandeln.

Da das Mass für die lebendige Kraft eines einzelnen Massenpunktes erhalten wird, indem man die Masse desselben mit dem Quadrate des Linearelements seiner Bahn multiplicirt und durch das Quadrat des Zeitelements dividirt, so hängt die Bestimmung des Masses von dem Ausdrucke des Linearelements im Raume ab. Die neueren Speculationen über die Natur des Raumes haben gezeigt, dass es nicht nothwendig ist, das Element einer von einem Punkte ausgehenden Linie im Raume als darstellbar durch die Quadratwurzel aus dem Aggregat der Quadrate von den Differentialen geeigneter Coordinaten

---

*) Philosophical transactions of the royal society of London, 1834, part II, pag. 247; 1835, part I, pag. 95.

des betreffenden Punktes anzunehmen. Wenn man von gewissen Bedingungen, die in dem wirklichen Raume thatsächlich erfüllt sind, abstrahirt, so ist es gestattet, das Linearelement gleich der Quadratwurzel aus einer beliebigen wesentlich positiven quadratischen Form, oder allgemeiner gleich der p^{ten} Wurzel aus einer beliebigen wesentlich positiven Form des p^{ten} Grades von den Differentialen beliebiger Coordinaten des betreffenden Punktes vorauszusetzen. Dieser allgemeineren Hypothese in Bezug auf die Natur des Raumes lassen sich die Begriffe der Mechanik anpassen *). Man kann feststellen, dass die lebendige Kraft eines Massenpunktes gemessen werde, indem die Masse des Punktes mit der p^{ten} Potenz des betreffenden Linearelements multiplicirt und durch die p^{te} Potenz des Zeitelements dividirt wird, und dem *Hamilton*schen Variationsproblem ein allgemeineres Variationsproblem substituiren, bei welchem das Aggregat aus dem p^{ten} Theile der Summe der so eben bestimmten lebendigen Kräfte des Massensystems und aus einer Kräftefunction, unter dem Integralzeichen erscheint.

Eine einfache Ueberlegung lehrt, dass, sobald zwischen den Coordinaten keine Bedingungsgleichungen existiren und die Kräftefunction gleich Null ist, die Integration des bezeichneten Variationsproblemes jedem Massenpunkte das Fortschreiten auf einer Linie vorschreibt, die für das gewählte Linearelement eine kürzeste Linie ist. Hiermit ist aber die erste Fundamentaleigenschaft der Bewegung eines Systems von Massenpunkten ausgesprochen, das an keine Bedingungsgleichungen gebunden ist und von keinen beschleunigenden Kräften getrieben wird. Wofern Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten der Massenpunkte gegeben sind, die nicht von der Zeit abhängen, so wird man bei dem bezeichneten Variationsproblem ebenfalls independente Variabele einführen, und es geht der p^{te} Theil der Summe der lebendigen Kräfte in eine wesentlich positive Form des p^{ten} Grades von den auf die Zeit bezogenen Differentialquotienten der Variabelen über. Ein Integral der be-

*) Eine gleiche Richtung verfolgt die Untersuchung von Herrn *Schering: Die Schwerkraft im Gaussischen Raume,* Nachrichten d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1870, Juli. Der Ausdruck, welcher daselbst pag. 318 als Repräsentant des Potentials bezeichnet wird, ergiebt sich aus der Formel für die Grösse w in dem Aufsatze: *Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen,* dieses Journ. Bd. 72, pag. 56, sobald die Zahl $n = 3$, $\sqrt{\alpha} = \varepsilon$, $\sqrt{2 f_0(u)} = (m, \mu)$ genommen, und der Factor $-m\mu$ hinzugefügt wird. Schon früher hat *Dirichlet* dieses Gebiet betreten. Derselbe sagte mir vor ungefähr zwanzig Jahren, er habe untersucht, wie sich die Theorie der Anziehung nach dem *Newton*schen Gesetze gestaltet, wenn dabei die *Gauss*ische Theorie des imaginären Raumes zu Grunde gelegt wird, theilte mir aber keine Einzelheiten mit.

treffenden isoperimetrischen Differentialgleichungen, das dem Integral der lebendigen Kraft entspricht, hat zur Folge, dass, wenn die Kräftefunction gleich Null ist, die in Rede stehende Form des p^{ten} Grades für jeden Werth der Zeit einen constanten Werth haben muss. Sind daher für ein Anfangssystem der Variabelen die sämmtlichen Anfangswerthe der Differentialquotienten gleich Null gegeben, so hat die Form beständig den Werth Null. Wegen des wesentlich positiven Charakters der Form sind dann auch die Differentialquotienten der Variabelen beständig gleich Null, und die Werthe der Variabelen bleiben dauernd gleich denjenigen Werthen, die für das Anfangssystem gegeben sind. Hierin liegt aber die zweite Fundamentaleigenschaft der Bewegung eines Systems von Massenpnkten, für das Bedingungsgleichungen existiren, und die Kräftefunction den Werth Null hat. Die vorliegende Arbeit bezieht sich auf das allgemeine Variationsproblem desjenigen Integrals, dessen Element gleich ist dem Aggregrate aus einer beliebigen Form des p^{ten} Grades von den nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der Variabelen und einer beliebigen nur von den Variabelen abhängenden Kräftefunction, in das Zeitelement multiplicirt.

Das Variationsproblem der bezeichneten Art, bei dem die Kräftefunction verschwindet, hängt innig zusammen mit den charakteristischen Eigenschaften der Form von Differentialen, welche entsteht, sobald man in der betreffenden Form des p^{ten} Grades die Differentialquotienten der Variabelen durch die bezüglichen Differentiale ersetzt. Nun erhebt sich die Frage, ob auch das allgemeine Variationsproblem, bei dem eine beliebige Kräftefunction auftritt, mit den charakteristischen Eigenschaften einer bestimmten Form oder ganzen homogenen Function von Differentialen in einer analogen Beziehung stehe.

Für das Variationsproblem, welches die wirkliche Bewegung eines Systems von Massenpunkten darstellt, bei dem also die Zahl p den Werth zwei hat, ergiebt sich die Bestimmung einer Form, von der dies gilt, folgendermassen. Wenn man die Summe der lebendigen Kräfte des Systems mit dem doppelten Aggregat aus der Kräftefunction und einer willkürlichen Constante multiplicirt, die aus diesem Product gezogene Quadratwurzel mit dem Elemente der Zeit multiplicirt und nach demselben integrirt, so entsteht *das Integral der kleinsten Wirkung*. Das Element dieses Integrals, aus dem sich das Zeitelement fortheben lässt, kann als die Quadratwurzel aus einer quadratischen Form von den Differentialen der Variabelen aufgefasst werden, und diese neue quadratische Form ist eine solche, mit der das in Rede stehende Variationsproblem in dem angedeuteten Sinne correspondirt.

Das Verschwinden der ersten Variation des Integrals der kleinsten Wirkung für unveränderliche Werthe der Anfangs- und der Endcoordinaten determinirt bekanntlich die Art und Weise, wie die eingeführten unabhängigen Variabelen bei der Bewegung des Massensystems von einer beliebig unter ihnen gewählten Variabele abhängen, und die Hinzufügung des Integrales der lebendigen Kraft giebt an, wie diese letzte Variabele sich mit der Zeit ändert.

Das Integral der kleinsten Wirkung verwandelt sich durch eine angemessene Substitution in die Function, welche *Hamilton* als *die charakteristische Function des mechanischen Problems* an die Spitze seiner Forschungen gestellt hat. Die eine der beiden partiellen Differentialgleichungen, die *Hamilton* für die charakteristische Function bildet, ist der Ausgangspunkt für die eingehenden und umfassenden Untersuchungen geworden, welche *Jacobi* den mechanischen und anderen mit denselben verwandten Problemen gewidmet hat. Dieselbe partielle Differentialgleichung erscheint als eine Transformationsrelation, wenn es sich darum handelt, die bezeichnete neue quadratische Form von den Differentialen der Variabelen des mechanischen Problems in eine andere Form zu transformiren, die durch einen Complex von Merkmalen ausgezeichnet ist.

Einen Leitfaden für die Betrachtung bietet hier die Untersuchung über die kürzesten Linien auf einer gegebenen Oberfläche, die *Gauss* in den *disquisitiones generales circa superficies curvas* niedergelegt hat. Zu den dortigen Ergebnissen gehört der Satz, dass, wenn man senkrecht gegen eine in der gegebenen Oberfläche beliebig gezeichnete Contour und nach derselben Seite dieser Contour lauter kürzeste Linien von gleicher Länge construirt, die Endpunkte eine neue Contour bilden, auf der die kürzesten Linien ebenfalls senkrecht stehen. Verschiedene Werthe der festen Länge ergeben verschiedene Contouren der Endpunkte; das Gesetz dieser Contouren wird aber dargestellt, indem ein gewisses Integral der correspondirenden *Hamilton*schen partiellen Differentialgleichung angemessene constante Werthe erhält.

Von Herrn *Beltrami* ist diese Anschauung auf einen Raum von n Dimensionen ausgedehnt, für den das Quadrat des Linearelements eine beliebige quadratische Form von den Differentialen der Coordinaten eines Punktes ist (*sulla teorica generale dei parametri differenziali,* memoria letta nella sessione 25. Febbrajo 1869 dell' accademia delle scienze dell' istituto di Bologna). Diese Anschauung lässt sich auf die Probleme der Mechanik übertragen, indem man eine gewisse Gruppirung der Anfangszustände des bewegten Massensystems einführt. Es werden nur solche Auflösungen des mechanischen

Problems zusammengenommen, für welche die Constante, die bei dem Integral der lebendigen Kraft zu der Kräftefunction hinzukommt, denselben Werth hat. An die Stelle einer kürzesten Linie auf der gegebenen Oberfläche tritt eine Auflösung des mechanischen Problems, an die Stelle der Contour der Anfangspunkte eine Gleichung für die Anfangswerthe der Variabelen, an die Stelle der Forderung einer senkrechten Richtung der kürzesten Linien gegen die Contour der Anfangspunkte eine Bestimmung für die Anfangselemente der Variabelen, an die Stelle der festen Länge der kürzesten Linien ein fester Werth des Integrals der kleinsten Wirkung. Dann findet sich für die mechanischen Probleme ein Resultat, das dem angeführten *Gauss*ischen Satze genau entspricht.

Dem allgemeinen Variationsproblem, bei dem das Aggregat aus einer Form des p^{ten} Grades von den Differentialquotienten der Variabelen und einer reinen Function der Variabelen auftritt, ist die Variation eines zweiten Integrals zugeordnet, das als eine Ausdehnung des Integrals der kleinsten Wirkung gelten kann. Das Element dieses zweiten Integrals ist die p^{te} Wurzel aus einer neuen Form des p^{ten} Grades von den Differentialen der Variabelen. Diese neue Form correspondirt in dem angegebenen Sinne mit dem zuerst aufgestellten allgemeinen Variationsproblem und erledigt somit die vorhin aufgeworfene Frage. Auch die übrigen für das Problem der Mechanik gefundenen Ergebnisse bleiben bei dem betreffenden allgemeinen Variationsproblem bestehen und haben insofern die Eigenschaft, von den thatsächlich geltenden Voraussetzungen über das Mass des Linearelements und der lebendigen Kraft unabhängig zu sein.

1.

Es erstrecke sich der Zeiger $\mathfrak{a}$, und in der Folge auch der Zeiger $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ über die Reihe der Zahlen von 1 bis n, und es bezeichne $x_\mathfrak{a}$ ein System von unveränderlichen Grössen, t eine independente Variabele, von der die $x_\mathfrak{a}$ abhängig gedacht werden, ϑ eine Function der Grössen $x_\mathfrak{a}$ und der ersten Differentialquotienten $\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt} = x'_\mathfrak{a}$, welche die Variabele t explicite nicht enthält. Dann beginnt die Untersuchung mit der Aufgabe, die Grössen $x_\mathfrak{a}$ in der Weise als Functionen der Variabele t zu bestimmen, dass die erste Variation des zwischen festen Grenzen genommenen Integrals

$$(1.) \qquad \Theta = \int_{t_0}^{t} \vartheta \, dt$$

für unveränderliche Anfangswerthe und Endwerthe der Variabelen $x_\mathfrak{a}$ gleich

Null wird. Die Darstellung der ersten Variation der Function ϑ

$$(2.)\qquad \delta\vartheta = \sum_a \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x_a} - \frac{d\frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}}{dt} \right) \delta x_a + \frac{d\sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}\delta x_a}{dt}$$

giebt das System von isoperimetrischen Differentialgleichungen

$$(3.)\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial x_a} - \frac{d\frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}}{dt} = 0.$$

Wenn man in (2.) das Zeichen δ durch das Zeichen d der Differentiation nach t ersetzt, so entsteht die Gleichung

$$(2^*.)\qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \sum_a \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x_a} - \frac{d\frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}}{dt} \right) x'_a + \frac{d\sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a} x'_a}{dt}.$$

Aus dieser Gleichung folgen zwei verschiedene Schlüsse, je nachdem der Ausdruck

$$(4.)\qquad \sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a} x'_a - \vartheta$$

gleich Null oder von Null verschieden ist. Der erstere Fall tritt dann und nur dann ein, wenn ϑ eine homogene Function des ersten Grades von den Grössen x'_a, mithin $\vartheta\,dt$ eine eben solche Function von den Grössen dx_a ist. Dann lehrt die Gleichung (2^*.), dass unter den n Gleichungen (3.) *eine* die Folge der $(n-1)$ übrigen ist, und die zu bestimmende Abhängigkeit der Grössen x_a von der Variabele t besteht lediglich in der Abhängigkeit dieser Grössen von einander. In dem anderen Falle liefert die Gleichung (2^*.) das Integral des Systems (3.)

$$(5.)\qquad \sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a} x'_a - \vartheta = H,$$

wo H eine willkürliche Constante bezeichnet. In beiden Fällen denkt man sich die vollständige Integration des Systems (3.) so ausgeführt, dass die Grössen x_a und x'_a für $t = t_0$ beziehungsweise den vorgeschriebenen Constanten $x_a(0)$ und $x'_a(0)$ gleich werden. In dem Falle, dass der Ausdruck (4.) gleich Null ist, betrachtet man die $(n-1)$ Grössen x_ι als von der übrig bleibenden Grösse x_{ι_1} abhängig, und hat als wesentliche Integrationsconstanten die zu dem Werthe $x_{\iota_1} = x_{\iota_1}(0)$ gehörigen $(n-1)$ Werthe $x_\iota(0)$ und $(n-1)$ Verhältnisse $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$. Die Charakteristik δ, mit der Einschliessung in eine

Klammer verbunden, bedeute eine Variation, bei der $x_a(0)$ und $x'_a(0)$ geändert werden, t fest bleibt; die Charakteristik δ ohne Klammer eine Variation, bei der auch t geändert wird; die Hinzufügung der Null bei einer Function die Substitution $x_a = x_a(0)$, $x'_a = x'_a(0)$. Alsdann giebt die Gleichung (2.) das Resultat

$$(6.)\qquad (\delta\Theta) = \sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}(\delta x_a) - \sum_a \frac{\partial\vartheta(0)}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0)$$

und, weil

$$\delta\Theta = (\delta\Theta) + \vartheta\, dt,\qquad \delta x_a = (\delta x_a) + x'_a(0)\,\delta t$$

ist, das nächste Resultat

$$(7.)\qquad \delta\Theta = \Big(\vartheta - \sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}x'_a\Big)\delta t + \sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}\delta x_a - \sum_a \frac{\partial\vartheta(0)}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0).$$

Sobald nun der Ausdruck (4.) gleich Null ist, so kommt

$$(7^*.)\qquad \delta\Theta = \sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}\delta x_a - \sum_a \frac{\partial\vartheta(0)}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0),$$

und die Grösse Θ ist gleich einer reinen Function der Werthsysteme x_a und $x_a(0)$. Damit die Grösse Θ eine eindeutige Function derselben sei, müssen die Integrationswerthe x_a von den Anfangswerthen $x_a(0)$ beziehungsweise nur um so viel abweichen, dass die $(n-1)$ Verhältnisse $\frac{x'_c(0)}{x'_{c_1}(0)}$ durch die Grössen x_a eindeutig ausgedrückt werden können. Wenn dagegen der Ausdruck (4.) nicht gleich Null ist, so gilt das Integral (5.), und die Anwendung desselben auf (7*.) liefert die Gleichung

$$(7^{**}.)\qquad \delta\Theta = -H\delta t + \sum_a \frac{\partial\vartheta}{\partial x'_a}\delta x_a - \sum_a \frac{\partial\vartheta(0)}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0).$$

Damit die Grösse Θ hier eine eindeutige Function der Grössen t, x_a, $x_a(0)$ sei, müssen die Integrationswerthe x_a von den Anfangswerthen $x_a(0)$ nur um soviel entfernt sein, dass die n Grössen $x'_a(0)$ durch die n Grössen x_a und durch t eindeutig dargestellt werden können.

Jetzt sollen zwei Voraussetzungen über die Function ϑ gemacht werden, für welche die entsprechenden Systeme von Differentialgleichungen (3.) in einer genauen gegenseitigen Beziehung stehen. Sei $f(dx)$ eine ganze homogene Function oder Form des p^{ten} Grades von den n Differentialen dx_a, deren Coefficienten von den Grössen x_b beliebig abhängen, und bei der die Determinante $\left|\frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_a \partial dx_b}\right|$ nicht identisch verschwindet, sei die Zahl p gleich oder grösser als Zwei, U eine reine Function der Variabelen x_a, dann heisst die

erste Voraussetzung

$$(8.)\qquad \vartheta = f\left(\frac{dx}{dt}\right)+U.$$

Vermöge derselben werden aus den Gleichungen (1.), (3.), (5.), (7.) beziehungsweise die Gleichungen

$$(1^a.)\qquad \Theta = \int_{t_0}^{t}(f(x')+U)\,dt,$$

$$(3^a.)\qquad \frac{d\frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt}-\frac{\partial f(x')}{\partial x_a}-\frac{\partial U}{\partial x_a} = 0,$$

$$(5^a.)\qquad (p-1)f(x')-U = H,$$

$$(7^a.)\qquad \delta\Theta = -H\delta t+\sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}\delta x_a-\sum_a \frac{\partial f_0(x'(0))}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0).$$

Bei der Integration des Systems (3^a.) ist auf Grund von früheren Ausführungen anzunehmen, dass die Determinante $\left|\frac{\partial^2 f(x')}{\partial x'_a\,\partial x'_b}\right|$ für die Substituion der Anfangswerthe $x_a = x_a(0)$, $x'_a = x'_a(0)$ einen von Null verschiedenen Werth bekomme. Ich nehme ferner an, dass die Grösse $(p-1)f(x') = U+H$ für dieselbe Substitution einen positiven Werth habe, und dass die Integration sich auf ein positives Intervall $t-t_0$ beziehe, und zwar allein auf ein solches Intervall, in dem die Grösse $(p-1)f(x') = U+H$ einen positiven Werth behält.

Wofern die Function U nicht gleich einer Constante ist, so wird mit dem gewählten Werthe der Constante H die neue Form des p^{ten} Grades von den n Differentialen dx_a gebildet

$$(9.)\qquad F(dx) = \left(\frac{p(U+H)}{p-1}\right)^{p-1} pf(dx).$$

Wenn aber U gleich einer Constante ist, so gelte die Gleichung

$$(10.)\qquad F(dx) = pf(dx).$$

An diese Form $F(dx)$ schliesst sich die zweite über die Function ϑ zu treffende Voraussetzung

$$(11.)\qquad \vartheta = \left(F\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Die Werthverbindungen x_a und $\frac{dx_a}{dt}$ sind dadurch beschränkt, dass die Form $f\left(\frac{dx}{dt}\right)$ und die Function $U+H$ nur positive Werthe erhalten dürfen; die p^{te} Wurzel aus einer positiven Grösse soll stets einen positiven Werth bezeichnen.

Durch (11.) verwandelt sich das Integral Θ in das Integral

$$(1^b.)\quad R = \int_{t_0}^{t} (F(x'))^{\frac{1}{p}} dt = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{p(U+H)}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} (pf(x'))^{\frac{1}{p}} dt,$$

beziehungsweise in das Integral

$$(1^{b*}.)\quad R = \int_{t_0}^{t} (F(x'))^{\frac{1}{p}} dt = \int_{t_0}^{t} (pf(x'))^{\frac{1}{p}} dt,$$

je nachdem U nicht constant oder constant ist. Das System der isoperimetrischen Differentialgleichungen (3.) geht in das System

$$(3^b.)\quad d\frac{\dfrac{\partial (F(x'))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a}}{dt} - \frac{\partial (F(x'))^{\frac{1}{p}}}{\partial x_a} = 0$$

über, welches, da die durch (11.) definirte Function ϑ in Bezug auf die Grössen $\frac{dx_a}{dt}$ homogen und vom ersten Grade ist, in Folge der oben ausgesprochenen Bemerkung mit einem System von $(n-1)$ Differentialgleichungen zwischen den Variabelen x_a gleichbedeutend ist. Das System $(3^b.)$ kann vermittelst der Bezeichnung

$$(12.)\quad \Omega = \frac{U+H}{(p-1)f(x')},$$

für ein nicht constantes U, oder

$$(12^*.)\quad \Omega = \frac{1}{pf(x')},$$

für ein constantes U, und einer einfachen Reduction folgendermassen dargestellt werden

$$(3^{b*}.)\quad \frac{1}{p}\Omega^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{d\dfrac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt} - \frac{\partial f(x')}{\partial x_a} - \frac{1}{\Omega}\frac{\partial U}{\partial x_a}\right) + \frac{1}{p}\frac{d\Omega^{\frac{p-1}{p}}}{dt}\frac{\partial f(x')}{\partial x'_a} = 0.$$

Die Gleichung $(7^*.)$ liefert den Ausdruck für das vollständige Differential der Grösse R, die als reine Function der Werthsysteme x_a und $x_a(0)$ aufgefasst werden kann,

$$(7^b.)\quad \delta R = \sum_a \frac{\partial (F(x'))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a}\delta x_a - \sum_a \frac{\partial (F_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0).$$

Für ein nicht constantes U ist derselbe gleich dem folgenden

$$(7^{b*}.)\quad \begin{cases} \delta R = \left(\dfrac{U+H}{(p-1)f(x')}\right)^{\frac{p-1}{p}} \sum_a \dfrac{\partial f(x')}{\partial x'_a}\delta x_a \\ \qquad - \left(\dfrac{U_0+H}{(p-1)f_0(x'(0))}\right)^{\frac{p-1}{p}} \sum_a \dfrac{\partial f_0(x'(0))}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0); \end{cases}$$

für ein constantes U hat man in (7^b*.) die Substitution

$$(10^*.)\quad \frac{p(U+H)}{p-1} = \frac{p(U_0+H)}{p-1} = 1$$

vorzunehmen.

Die Art der Beziehung zwischen dem System (3^a.) und dem System (3^b*.) richtet sich nach dem mehrfach hervorgehobenen Umstande, ob die Function U gleich einer Constante ist oder nicht. In dem ersten Falle sind die Ausdrücke $\frac{\partial U}{\partial x_a} = 0$, und es ist möglich, aus dem System (3^a.) die Variabele t unmittelbar zu eliminiren *). Das Resultat dieser Elimination wird durch das System (3^b*.) dargestellt; denn das System (3^a.) hat die Gleichung $\frac{df(x')}{dt} = 0$, und deshalb auch die Gleichung $\frac{d\Omega}{dt} = 0$ zur Folge, und vermöge dieser Gleichungen und der Gleichungen $\frac{\partial U}{\partial x_a} = 0$ ergiebt sich das System (3^b*.) aus dem System (3^a.). In dem zweiten Falle, wo die Function U nicht gleich einer Constante ist, kann man aus dem System (3^a.) die Variabele t mit Hülfe des Integrals (5^a.) eliminiren. Das Resultat dieser Elimination wird ebenfalls durch das System (3^b*.) dargestellt; denn das Integral (5^a.) des Systems (3^a.) ist mit der Gleichung

$$(13.)\quad \Omega = 1$$

aequivalent, und bei Hinzuziehung derselben folgt das System (3^b*.) aus dem System (3^a.). Da die Variabele t in dem System (3^b*.) nur formell auftritt, so kann man statt derselben auch eine beliebige Variabele x_{ι_1} aus den Variabelen x_a substituiren und dadurch, wie schon erwähnt, die $(n-1)$ anderen Variabelen x_ι von dieser abhängig machen. Unter den n Differentialgleichungen des Systems (3^b*.) sind dann immer $n-1$ von der Beschaffenheit, dass vermöge derselben die $n-1$ zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2 x_\iota}{(dx_{\iota_1})^2}$ eindeutig durch die ersten Differentialquotienten und die Variabelen ausgedrückt werden. Denn die n Ableitungen der Determinante $\left|\frac{\partial^2 f(x')}{\partial x'_a \partial x'_b}\right|$ nach den Elementen $\frac{\partial^2 f(x')}{\partial x'_a \partial x'_{\iota_1}}$ können nicht sämmtlich verschwinden, ohne dass die Determinante ebenfalls verschwindet. Sobald nun das System (3^b*.) in der oben bezeichneten Weise vollständig integrirt ist, so dass dem Werthe $x_{\iota_1} = x_{\iota_1}(0)$ die Werthe der Variabelen $x_\iota = x_\iota(0)$ und die Werthe der Differentialquotienten

*) *Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen,* d. Journal Bd. 70, pag. 88.

$\frac{dx_\iota}{dx_{\iota_1}} = \frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ entsprechen, dann ergiebt sich eine vollständige Integration des Systems (3^a.), bei der für den Werth $t = t_0$ die Variabelen x_a und die Differentialquotienten $\frac{dx_a}{dt}$ die correspondirenden Werthe $x_a(0)$ und $x'_a(0)$ annehmen durch Ausführung einer einfachen Integration. Die Abhängigkeit der Variabele x_{ι_1} von der Variabele t wird bei einem constanten U durch die Gleichung

$$\frac{df(x')}{dt} = 0,$$

bei einem nicht constanten U durch die Gleichung (13.)

$$\Omega = 1$$

dargestellt. Daher entsteht für den letzteren Fall die Gleichung

$$(14.)\quad t - t_0 = \int_{x_{\iota_1}(0)}^{x_{\iota_1}} \sqrt[p]{\frac{(p-1)f\left(\frac{dx}{dx_{\iota_1}}\right)}{U+H}}\, dx_{\iota_1}$$

und für den ersteren Fall die Gleichung

$$(14^*.)\quad t - t_0 = \int_{x_{\iota_1}(0)}^{x_{\iota_1}} \sqrt[p]{\frac{f\left(\frac{dx}{dx_{\iota_1}}\right)}{f_0(x'(0))}}\, dx_{\iota_1}.$$

Wenn dagegen das System (3^a.) in der vorgeschriebenen Weise vollständig integrirt ist, so liefert die bezügliche Elimination Ausdrücke der Variabelen x_ι durch die Variabele x_{ι_1}, welche das System (3^{b*}.) unter den entsprechenden Bedingungen vollständig integriren. Vermöge der Integration des Systems (3^a.) entsteht für das Integral R, sobald U nicht constant ist, aus (1^b.) die Gestalt

$$(15.)\quad R = \int_{t_0}^{t} p f(x')\, dt,$$

wenn aber U constant ist, aus (1^{b*}.) die Gestalt

$$(15^*.)\quad R = (p f_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}} (t - t_0).$$

2.

Eine Hauptabsicht der gegenwärtigen Untersuchung geht auf die Erörterung des Zusammenhangs, der zwischen dem System von isoperimetrischen

Differentialgleichungen (3^a.) bei einer ganz beliebigen Function U und den Eigenschaften der Form $F(dx)$ besteht. Ich werde zu diesem Behufe zunächst die Zahl $p=2$ voraussetzen und die Bedeutung aussprechen, welche die bis jetzt eingeführten Begriffe in dem Gebiete der reellen Mechanik haben.

Wenn ein System von Massenpunkten gegeben ist, für dessen Bewegung von der Zeit unabhängige Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten existiren, und die herrschenden Kräfte durch eine Kräftefunction dargestellt werden können, so denkt man sich die Coordinaten der Massenpunkte durch n independente Variabele x_a ausgedrückt, und es sei die Zeit gleich t, die Summe der lebendigen Kräfte des Systems gleich der quadratischen Form $2f\left(\frac{dx}{dt}\right)$, die Kräftefunction gleich der Function U. Dann ergiebt nach der Bemerkung *Hamiltons* das Variationsproblem des Integrals (1^a.)

$$\Theta = \int_{t_0}^{t}(f(x')+U)\,dt$$

das System der Differentialgleichungen der Bewegung (3^a.)

$$\frac{d\frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt}-\frac{\partial f(x')}{\partial x_a}-\frac{\partial U}{\partial x_a} = 0,$$

und die Gleichung (5^a.)

$$f(x')-U = H$$

wird *das Integral der lebendigen Kraft.* Gleichzeitig erhält das Integral (1^b.) die Gestalt

$$R = \int_{t_0}^{t} 2(U+H)^{\frac{1}{2}}(f(x'))^{\frac{1}{2}}\,dt,$$

welche *Jacobi dem Integral der kleinsten Wirkung* pag. 43 der Vorlesungen über Dynamik gegeben hat, und das System (3^b.) wird *das System der Differentialgleichungen der Bewegung, das aus dem Princip der kleinsten Wirkung folgt. Jacobi* hat an der angeführten Stelle die Reduction des Systems (3^b.) auf das System (3^a.) unter der Annahme entwickelt, dass die Massenpunkte frei sind, oder, dass für positive Constanten μ_a die Form $2f(dx)=\sum_a \mu_a dx_a^2$ ist.

Das Integral der kleinsten Wirkung R verwandelt sich vermöge der Gleichung (15.) in das Integral

$$R = \int_{t_0}^{t} 2f(x')\,dt,$$

welches *Hamilton* als *die angehäufte lebendige Kraft* bezeichnet, und dieses

geht durch die Einführung der Grössen x_a und $x_a(0)$ in die Function über, welche *Hamilton die charakteristische Function des mechanischen Problems* nennt. Das vollständige Differential derselben wird nach (7^{b*}.) durch die Gleichung

$$(16.)\qquad \delta R = \left(\frac{U+H}{f(x')}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}\,\delta x_a - \left(\frac{U_0+H}{f_0 x'(0)}\right)^{\frac{1}{2}} \delta x_a(0)$$

dargestellt. Sie entspricht, sobald $2f(dx) = \Sigma \mu_a dx_a^2$ ist, der Gleichung (*A*.) auf pag. 251 der angeführten *Hamilton*schen Abhandlung; nur der Werth *H*, der gegenwärtig als fest gilt, wird bei *Hamilton* ebenfalls variirt. Die charakteristische Function *R* hat vermöge der Gleichung (16.) die Ableitungen

$$\frac{\partial R}{\partial x_a} = \left(\frac{U+H}{f(x')}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_a(0)} = -\left(\frac{U_0+H}{f_0(x'(0))}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial f_0(x'(0))}{\partial x'_a(0)}.$$

Wenn nun die quadratische Form $f(dx)$, ihre Determinante und ihre adjungirten Elemente, wie folgt, bezeichnet werden

$$(17.)\qquad \begin{cases} f(dx) = \frac{1}{2} \sum\limits_{a,b} a_{a,b}\, dx_a\, dx_b, \\ |a_{a,b}| = \Delta, \quad \dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{a,b}} = A_{a,b}, \end{cases}$$

so liefern die Ausdrücke von $\frac{\partial R}{\partial x_a}$ und $\frac{\partial R}{\partial x_a(0)}$ *die beiden Hamiltonschen partiellen Differentialgleichungen*

$$(18.)\qquad \sum_{a,b} \frac{A_{a,b}}{\Delta} \frac{\partial R}{\partial x_a} \frac{\partial R}{\partial x_b} = 2(U+H),$$

$$(19.)\qquad \sum_{a,b} \frac{A_{a,b}(0)}{\Delta(0)} \frac{\partial R}{\partial x_a(0)} \frac{\partial R}{\partial x_b(0)} = 2(U_0+H).$$

Die so eben unter der Voraussetzung $p=2$ aufgestellten Formeln beziehen sich sämmtlich auf ein nicht constantes *U*; die entsprechenden Formeln, bei denen *U* constant ist, werden aus den ersteren durch die Substitution

$$(10^{**}.)\qquad 2(U+H) = 2(U_0+H) = 1$$

abgeleitet.

Der Zusammenhang zwischen dem System der Differentialgleichungen der Bewegung (8^a.) und der quadratischen Form

$$(9^*.)\qquad F(dx) = 2(U+H)2f(dx)$$

gründet sich darauf, dass die dem Bewegungsproblem zugehörige partielle Differentialgleichung (18.) als eine Transformationsrelation dieser Form aufgefasst werden kann.

Bei dem Problem der kürzesten Linie auf einer gegebenen Oberfläche hat *Gauss* diesen Zusammenhang in den *disquisitiones generales circa superficies curvas* kennen gelehrt. Der Ort eines materiellen Punktes, der sich auf einer gegebenen Oberfläche bewegen muss, und auf den keine beschleunigenden Kräfte wirken, sei durch die independenten Variabelen x_1, x_2 bestimmt, das Quadrat des Linearelements in der Oberfläche habe den Ausdruck

$$2f(dx) = a_{1,1}\,dx_1^2 + 2a_{1,2}\,dx_1\,dx_2 + a_{2,2}\,dx_2^2.$$

Dann misst das Integral R den von dem Orte $(x_1(0), x_2(0))$ bis zu dem Orte (x_1, x_2) durchlaufenen Weg des Punktes, und dieser Weg muss nach dem Princip der kleinsten Wirkung ein Minimum sein. Wenn nun durch Φ der Winkel oder eine beliebige Function des Winkels bezeichnet wird, den das Anfangselement der von dem Orte $(x_1(0), x_2(0))$ ausgehenden kürzesten Linie mit dem Element dx_1 bildet, so kann man die Grössen R und Φ als neue Variabele statt x_1 und x_2 einführen und erhält nach art. 19. der angeführten Schrift die Transformation für das Quadrat des Linearelements

$$2f(dx) = dR^2 + m^2\,d\Phi^2.$$

Die Coefficienten der Form, die zu der neuen Form $(1, 0, m^2)$ adjungirt ist, durch die Determinante m^2 dividirt, sind die Grössen 1, 0, $\frac{1}{m^2}$. Dieselben werden vermittelst der Coefficienten der ursprünglichen Form, wie folgt, ausgedrückt

$$(18^*.)\quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta}\left(a_{1,1}\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)^2 - 2a_{1,2}\frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{\partial R}{\partial x_2} + a_{2,2}\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}\right)^2\right) = 1, \\ \frac{1}{\Delta}\left(a_{1,1}\frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - a_{1,2}\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right) + a_{2,2}\frac{\partial R}{\partial x_2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right) = 0, \\ \frac{1}{\Delta}\left(a_{1,1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)^2 - 2a_{1,2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + a_{2,2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)^2\right) = \frac{1}{m^2}. \end{cases}$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen sind die Gleichungen (5.) und (6.) in art. 22. der *disquisitiones generales*. Die erstere fällt überdies mit der obigen Gleichung (18.) zusammen, da in derselben für den vorliegenden Zweck $U = 0$ und $2(U+H) = 1$ genommen werden muss *).

Herr *Beltrami* hat eine analoge Betrachtung für den Fall durchgeführt, dass $f(dx)$ eine beliebige quadratische Form, und die Function $U = 0$ ist; diese Betrachtung ist jedoch allein auf geometrische, nicht auf mechanische

---

*) *Weingarten: Ueber die Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren;* d. Journal Bd. 62 pag. 63.

Vorstellungen bezogen. Aus den Forschungen *Jacobis*, welche an die Differentialgleichung (18.) anknüpfen, muss ich namentlich das Resultat herausheben, dass jedes vollständige Integral dieser Differentialgleichung eine vollständige Integration des zugeordneten Systems von mechanischen Differentialgleichungen (3^a.) liefert. Die Untersuchung der Transformation der in (9.) und (10.) definirten Form des p^{ten} Grades $F(dx)$ wird auch eine Begründung jenes von *Jacobi* gefundenen Resultats ergeben.

3.

Ein System von neuen Variabelen, das zur Transformation der Form $F(dx)$ dienen soll, wird aus der vollständigen Integration des Systems von Differentialgleichungen (3^b.) abgeleitet. Nachdem die $(n-1)$ Variabelen x_ϵ in der angegebenen Weise durch die Variabele x_{ϵ_1} ausgedrückt sind, stelle man das Integral R durch die Gleichung

$$(20.)\qquad R = \int_{x_{\epsilon_1}(0)}^{x_{\epsilon_1}} \left(F\left(\frac{dx}{dx_{\epsilon_1}}\right)\right)^{\frac{1}{p}} dx_{\epsilon_1}$$

als Function der Variabele x_{ϵ_1} dar. Hierauf betrachte man, die Beziehung umkehrend, x_{ϵ_1} als Function von R. Dann werden auch die Integrationswerthe der Variabelen x_ϵ von R abhängig, und man erhält Ausdrücke der sämmtlichen Variabelen x_a durch R, durch die $(n-1)$ Verhältnisse $\frac{x'_\epsilon(0)}{x'_{\epsilon_1}(0)}$ und durch die n Grössen $x_a(0)$. In diesen Ausdrücken werden die n Grössen $x_a(0)$ als constant angesehen, und die Grösse R in Verbindung mit den $(n-1)$ Verhältnissen $\frac{x'_\epsilon(0)}{x'_{\epsilon_1}(0)}$ bildet ein System von neuen Variabelen, das dem gegenwärtigen Zwecke entspricht. Nach einer in dem ersten Artikel gemachten Bemerkung müssen die Verhältnisse $\frac{x'_\epsilon(0)}{x'_{\epsilon_1}(0)}$ eindeutige Functionen der Grössen x_a sein, damit R eine eindeutige Function dieser Grössen werde. Ich setze voraus, dass die Verhältnisse $\frac{x'_\epsilon(0)}{x'_{\epsilon_1}(0)}$ und die Grösse R diese Beschaffenheit haben, dass also die Variabelen x_a unabhängige Functionen der neuen Variabelen sind *). Ein allgemeineres hier anwendbares System von Variabelen entsteht

---

*) Auf den Inhalt dieser Forderung bezieht sich der Aufsatz: *Beiträge zu der Theorie der Umkehrung eines Functionensystems*, Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1870, November.

dadurch, dass man zu der Grösse R ein System von $(n-1)$ beliebigen unabhängigen Functionen $\Phi_2, \Phi_3, \ldots \Phi_n$ der $(n-1)$ Verhältnisse $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ hinzufügt.

Es gewährt ein Interesse, zu beobachten, in welche Abhängigkeit die Grösse R von der Variabele t treten muss, damit aus der Integration des Systems (3^b.) die Integration des Systems (3^a.) hervorgehe. Nach der Definition von R ist

$$(20^*.)\qquad \frac{dR}{dt} = \left(F\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Hieraus folgt, wenn U nicht constant ist, vermöge des Integrals (5^a.) die Gleichung

$$\frac{dR}{dt} = \frac{p(U+H)}{p-1},$$

und es kommt, weil R für $t = t_0$ verschwindet, die Beziehung

$$(21.)\qquad t-t_0 = \int_0^R \frac{(p-1)\,dR}{p(U+H)}.$$

Wenn dagegen U constant ist, so gilt die oben gebildete Gleichung (15*.), und man hat

$$t-t_0 = \frac{R}{(pf_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}},$$

Aus dem System der n Variabelen R, $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ folgt auch ein zweites System von n Variabelen, das zwar nicht für den Zweck der vorzunehmenden Transformation geeignet ist, doch für sich selbst Beachtung verdient. Es ist das System

$$(22.)\qquad \frac{x'_a(0)}{(F_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}}R,$$

bei welchem die Brüche $\frac{x'_a(0)}{(F_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}}$ nur von den $n-1$ Verhältnissen $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ abhängen. Die Eigenschaften dieses Systems kommen zur Erscheinung, sobald man bei den behandelten Variationsproblemen statt der Variabelen x_a ein beliebiges System von neuen unabhängigen Variabelen y_b einführt. Die transformirten Systeme von isoperimetrischen Differentialgleichungen denkt man sich so integrirt, dass die Constante H den ursprünglichen Werth behält, und

dass die Anfangswerthe $y_b(0)$, $y'_b(0)$ mit den Anfangswerthen $x_a(0)$, $x'_a(0)$ correspondiren. Es komme alsdann

$$(23.)\quad \begin{cases} f(dx) = g(dy), \\ F(dx) = G(dy), \end{cases}$$

so wird

$$(24.)\quad \begin{cases} R = \int_{t_0}^{t} (F(x'))^{\frac{1}{p}} dt = \int_{t_0}^{t} (G(y'))^{\frac{1}{p}} dt, \\ \left(\frac{dR}{dt}\right)_{t=t_0} = F_0(x'(0)) = G_0(y'(0)), \\ x'_a(0) = \sum_{\mathfrak{k}} \left(\frac{\partial x_a}{\partial y_{\mathfrak{k}}}\right)_0 y'_{\mathfrak{k}}(0). \end{cases}$$

Wenn man nun für die transformirten Variationsprobleme das System (22.) bildet, so geht sowohl das Integral R wie auch der Ausdruck $(F_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}$ in sich selbst über, und die neuen Grössen

$$(25.)\quad \frac{y'_{\mathfrak{k}}(0)}{(G_0(y'(0)))^{\frac{1}{p}}} R$$

sind mit den Grössen (22.) durch lineare Gleichungen von constanten Coefficienten verbunden. In dem Fall, dass U constant ist, hat man $F(dx) = pf(dx)$, und es werden die Ausdrücke (22.) durch die Gleichung (15*.) gleich den Ausdrücken

$$x'_a(0)(t-t_0),$$

welche, d. Journal Bd. 72, pag. 4, als *die Normalvariabelen der Form* $f(dx)$ bezeichnet sind. Die Ausdrücke (22.) spielen für die Form $F(dx)$ eine gleiche Rolle, und mit Hülfe derselben ist es möglich, die in Betreff der Form $f(dx)$ angestellten Speculationen auf die Form $F(dx)$ zu übertragen. Da die Variabelen $x_a = x_a(0)$ werden, sobald R gleich Null wird, so ergiebt die Entwickelung der Grössen x_a, welche das System (3^b.) vollständig integriren, nach den Potenzen der Variabele R bis auf Glieder der ersten Ordnung die Gleichungen

$$(26.)\quad x_a = x_a(0) + \frac{x'_a(0)}{\left(\frac{dR}{dt}\right)_{t=t_0}} R.$$

Die Glieder der ersten Ordnung selbst sind die Normalvariabelen (22.), und diese Eigenschaft begründet eine Definition derselben.

Wenn man die Differentiation der Grössen x_a nach der Variabele t durch eine Differentiation nach der Variabele R ersetzt, so folgt aus (20*.) die Gleichung

$$(27.)\quad F\left(\frac{dx}{dR}\right) = 1,$$

mithin durch Substitution der Anfangswerthe auch die Gleichung

$$(28.)\quad F_0\left(\left(\frac{dx}{dR}\right)_0\right) = 1.$$

In der Gleichung (7^b.) sind die Ausdrücke $\frac{\partial(F(x'))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a}$ homogene Functionen der Grössen x'_b von der Ordnung Null, die Ausdrücke $\frac{\partial(F_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a(0)}$ ebensolche Functionen von den Grössen $x'_b(0)$. Deshalb kann die Differentiation nach R für die Differentiation nach t unmittelbar eintreten, und es entsteht die Gleichung

$$(29.)\quad \delta R = \sum_a \frac{\partial\left(F\left(\frac{dx}{dR}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\partial\left(\frac{dx_a}{dR}\right)}\delta x_a - \sum_a \frac{\partial\left(F_0\left(\left(\frac{dx}{dR}\right)_0\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\partial\left(\left(\frac{dx_a}{dR}\right)_0\right)}\delta x_a(0).$$

Dieselbe verwandelt sich, wenn beide Seiten mit dem Factor R^{p-1} multiplicirt werden, vermöge der aus (27.) und (28.) folgenden Relation

$$(27^*.)\quad R^p = F\left(\frac{dx}{dR}R\right) = F_0\left(\left(\frac{dx}{dR}\right)_0 R\right)$$

in die Gleichung (12.), d. Journal Bd. 72, pag. 7, sobald $\left(\frac{dx_a}{dR}\right)_0 R$ durch u_a, $\frac{dx_a}{dR}R$ durch v_a, $F(dx)$ durch $pf(dx)$, $F_0(dx)$ durch $pf_0(dx)$ ersetzt wird. Diese Gleichung ist das wesentlichste Hülfsmittel für die dortigen Untersuchungen.

4.

Wenn man die n Variabelen x_a durch die im vorigen Artikel bestimmten neuen n Variabelen $R, \Phi_2, \Phi_3, \ldots \Phi_n$ ausgedrückt hat, so sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_a}{\partial R}$ nichts anderes, als diejenigen Ableitungen, welche soeben mit $\frac{dx_a}{dR}$ bezeichnet sind; denn bei der Differentiation der Integrationswerthe

x_a nach der Grösse R werden die $(n-1)$ Verhältnisse $\frac{x'_c(0)}{x'_{c_1}(0)}$ nicht berührt. Demnach, und weil die Grössen $x_a(0)$ überhaupt als constant gelten, folgen aus (29.) und (27.) die Gleichungen

$$(30.)\qquad \delta R = \sum_a \frac{\partial\left(F\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial R}\right)}\delta x_a$$

und

$$(31.)\qquad F\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right) = 1.$$

Die Verbindung derselben liefert das Resultat

$$(32.)\qquad \delta R = \frac{1}{p}\sum_a \frac{\partial F\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial R}\right)}\delta x_a.$$

Hieraus lässt sich die Grundeigenschaft der Form entwickeln, in welche $F(dx)$ durch die Substitution der Variabelen $R, \Phi_2, \dots \Phi_n$ übergeht.

Gesetzt, die Form $F(dx)$ werde, wie in (23.), durch die Substitution eines beliebigen Systems y_b transformirt; dann sind die dx_a lineare Functionen der dy_b. Das Gleiche gelte von den δx_a und den δy_b, dann gilt es auch von den Aggregaten $dx_a+\delta x_a$ und $dy_b+\delta y_b$. Man hat also die Gleichung

$$F(dx+\delta x) = G(dy+\delta y),$$

und bei einer Entwickelung der beiden Seiten müssen diejenigen Aggregate links den Aggregaten rechts gleich sein, in welchen der Grad in Bezug auf die dx_a dem Grade in Bezug auf die dy_b, und der Grad in Bezug auf die δx_a dem Grade in Bezug auf die δy_b respective gleich ist. Wenn man die Differentiale dx_a der Einschränkung unterwirft, dass $dx_a = \frac{\partial x_a}{\partial y_1}dy_1$ sei, so sind die Differentiale $dy_2, dy_3, \dots dy_n$ gleich Null zu setzen. Unter dieser Voraussetzung giebt die Gleichsetzung der Aggregate, die nach den δx_a und den δy_b von der ersten Ordnung sind, die Relation

$$(33.)\qquad \sum_a \frac{\partial F(dx)}{\partial dx_a}\delta x_a = \frac{1}{1.2.3\dots(p-1)}\frac{\partial^{p-1}G(\delta y)}{\partial(\delta y_1)^{p-1}}dy_1^{p-1}.$$

In $G(\delta y)$ sei das Aggregat der Glieder, welche δy_1 in der p^{ten} und $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenz enthalten, das folgende

$$(34.)\qquad G_1\delta y_1^p + pG_2\delta y_1^{p-1}\delta y_2 + \dots + pG_n\delta y_1^{p-1}\delta y_n;$$

dann folgt aus (33.) unter Fortlassung des Factors dy_1^{p-1} die Gleichung

$$(35.)\quad \sum_a \frac{\partial F\left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_1}\right)}\delta x_a = p(G_1\delta y_1+\cdots+G_n\delta y_n).$$

Ich betrachte nun die Transformation der Form $F(dx)$, bei welcher

$$y_1 = R,\quad y_2 = \Phi_2,\quad \ldots\quad y_n = \Phi_n$$

ist; die linke Seite von (35.) wird gleich der rechten Seite von (32.), in die Zahl p multiplicirt, und aus (32.) folgt die Relation

$$(36.)\quad \delta R = G_1\delta R+G_2\delta\Phi_2+\cdots+G_n\delta\Phi_n.$$

Also bestehen nothwendig die n Gleichungen

$$(36^*.)\quad G_1 = 1,\quad G_2 = 0,\quad \ldots\quad G_n = 0,$$

und es gilt das

Theorem I. Wenn man die Form $F(dx)$ durch die Einführung der Variabelen R, Φ_2, ... Φ_n transformirt, so ist in der resultirenden Form der Coefficient der Potenz dR^p gleich der Einheit, und die Coefficienten der $(n-1)$ Verbindungen $dR^{p-1}d\Phi_2$, ... $dR^{p-1}d\Phi_n$ sind gleich der Null.

5.

Das in dem vorigen Artikel definirte System R, Φ_2, Φ_3, ... Φ_n hat vermöge seiner Entstehung die Eigenschaft, dass das Constantsetzen der $n-1$ Variabelen Φ_2, ... Φ_n eine Integration des Systems von Differentialgleichungen (3^b.) darstellt. Insofern entspricht dem bewiesenen Theorem als Umkehrung das

Theorem II. Wenn die Form $F(dx)$ durch ein System von neuen Variabelen y_1, y_2, ... y_n in eine Form $G(dy)$ übergeht, bei der der Coefficient der Potenz dy_1^p gleich der Einheit ist, und die Coefficienten der $(n-1)$ Verbindungen $dy_1^{p-1}dy_2$, ... $dy_1^{p-1}dy_n$ gleich der Null sind, so wird das System von Differentialgleichungen (3^b.) durch das Constantsetzen der $(n-1)$ Functionen y_2, y_3, ... y_n integrirt.

Da das Integral R durch die Einführung der Variabelen y_1, y_2, ... y_n, wie in (24.), die Gestalt

$$R = \int_{t_0}^{t}\left(G\left(\frac{dy}{dt}\right)\right)^{\frac{1}{p}}dt$$

annimmt, so tritt an die Stelle des Systems (3^b.) das System

$$(37.)\qquad \frac{d\dfrac{\partial (G(y'))^{\frac{1}{p}}}{\partial y'_a}}{dt} - \frac{\partial (G(y'))^{\frac{1}{p}}}{\partial y_a} = 0.$$

Hier ist jede Gleichung eine Folge der $(n-1)$ übrigen Gleichungen; daher genügt es, die $(n-1)$ Gleichungen zu betrachten, in denen $a = \tau$ ist, wo τ die Reihe der Zahlen 2, 3, ... n durchläuft. Aus den über die Form $G(dy)$ geltenden Voraussetzungen geht hervor, dass die Ableitungen $\frac{\partial G(y')}{\partial y'_\tau}$ Aggregate sind, von denen jedes Glied die Grössen $y'_2, \ldots y'_n$ mindestens in der ersten Dimension enthält, und dass die Ableitungen $\frac{\partial G(y')}{\partial y_\tau}$ Aggregate sind, von denen jedes Glied die Grössen $y'_2, y'_3, \ldots y'_n$ mindestens in der zweiten Dimension enthält. Die $(n-1)$ Gleichungen (37.), in denen $a = \tau$ ist, werden deshalb erfüllt, sobald man die $(n-1)$ Differentialquotienten $y'_\tau = 0$ annimmt. Also ist die Behauptung gerechtfertigt, dass das Constantsetzen der $(n-1)$ Functionen y_τ

$$(38.)\qquad y_\tau = y_\tau(0)$$

eine Integration des Systems von Differentialgleichungen (3^b.) liefert.

Der Ausdruck der Function R gestaltet sich bei der Einführung dieser Integrationswerthe sehr einfach. Durch die Gleichungen $y'_\tau = 0$ wird $G(y') = (y'_1)^p$, und deshalb, so lange y'_1 positiv ist, $(G(y'))^{\frac{1}{p}} = y'_1$; mithin ist R, wie folgt, ohne Integralzeichen darstellbar

$$(39.)\qquad R = y_1 - y_1(0).$$

6.

Die Darstellung des exacten Differentials der Function R in (30.) enthält das Schema zu einer Aufgabe, die mit der *Hamilton*schen partiellen Differentialgleichung für die Function R äquivalent ist. Die Aufgabe ist die, eine Function P der n Variabelen x_a zu bestimmen, deren exactes Differential die Bedingung

$$(40.)\qquad \delta P = \sum_a \frac{\partial (F(\xi))^{\frac{1}{p}}}{\partial \xi_a}\,\delta x_a$$

befriedigt. Hier treten von den n Grössen ξ_a, die in $F(dx)$ statt der Differentiale dx_a substituirt sind, in den n Gleichungen

$$(41.)\qquad \frac{\partial P}{\partial x_a} = \frac{\partial (F(\xi))^{\frac{1}{p}}}{\partial \xi_a}$$

nur die $(n-1)$ Verhältnisse auf, und die Elimination dieser Verhältnisse aus den n Gleichungen bringt die *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung für die Function P hervor. Unter der Voraussetzung, dass die Zahl $p = 2$ ist, entsteht auf diese Weise die obige Gleichung (18.). Wenn dagegen $p > 2$ ist, so stehen der wirklichen Ausführung jener Elimination erhebliche algebraische Schwierigkeiten im Wege; für den gegenwärtigen Zweck ist aber die Möglichkeit der Elimination ausreichend.

Die Function R ist ein *vollständiges Integral* der Forderung (40.) vermöge der in R enthaltenen n willkürlichen Constanten $x_a(0)$. Wenn nun ein beliebiges *vollständiges Integral* der Forderung P, mit den willkürlichen Constanten $c_1, c_2, \ldots c_n$, vorliegt, und wenn P in Verbindung mit $(n-1)$ von den Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial c_a}$ ein System von unabhängigen Functionen der Variabelen x_a darstellt, so verwandelt sich die Form $F(dx)$ durch die Einführung dieses Systems von neuen Variabelen

$$(42.)\qquad P,\quad \Phi_2 = \frac{\partial P}{\partial c_2},\quad \Phi_3 = \frac{\partial P}{\partial c_3},\quad \ldots\quad \Phi_n = \frac{\partial P}{\partial c_n}$$

in eine Form von denselben Eigenschaften, wie durch die Einführung des Systems $R, \Phi_2, \Phi_3, \ldots \Phi_n$ in Artikel 4. Um dies zu begründen, hat man nur zu zeigen, dass die in Bezug auf das System (42.) gebildeten partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_a}{\partial P}$ die Gleichungen

$$(43.)\qquad \delta P = \sum_a \frac{\partial\left(F\left(\frac{\partial x}{\partial P}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial P}\right)}\,\delta x_a$$

und

$$(44.)\qquad F\left(\frac{\partial x}{\partial P}\right) = 1$$

erfüllen, die den obigen Gleichungen (30.) und (31.) entsprechen. Denn die Schlüsse des gegebenen Beweises sind allein auf diese Gleichungen gegründet.

Die Substitution der Grössen ξ_a statt der Differentiale dx_a in (40.) ergiebt die Gleichung

$$(45.)\qquad \sum_a \frac{\partial P}{\partial x_a}\xi_a = (F(\xi))^{\frac{1}{p}}.$$

Durch die Gleichungen (41.) sind die Verhältnisse der Grössen ξ_a in ihrer Abhängigkeit von den Variabelen x_a und den Constanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ des

Integrals P bestimmt. Die Grössen ξ_a werden vollständig bestimmt, sobald man zwischen denselben noch die Gleichung

$$(46.)\qquad F(\xi) = 1$$

annimmt. Durch partielle Differentiation nach einer der Constanten c_t folgt aus (45.) die Gleichung

$$(47.)\qquad \sum_a \frac{\partial^2 P}{\partial x_a \partial c_t}\xi_a + \sum_a \frac{\partial P}{\partial x_a}\frac{\partial \xi_a}{\partial c_t} = \sum_a \frac{\partial (F(\xi))^{\frac{1}{p}}}{\partial \xi_a}\frac{\partial \xi_a}{\partial c_t},$$

die durch die Relation (41.) in die Gleichung

$$(48.)\qquad \sum_a \frac{\partial^2 P}{\partial x_a \partial c_t}\xi_a = 0$$

übergeht. Dieselbe lehrt, wenn t alle Werthe von 1 bis n durchläuft, dass die Functionaldeterminante der n Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial c_1}, \frac{\partial P}{\partial c_2}, \dots \frac{\partial P}{\partial c_n}$ in Bezug auf die n Variabelen x_a gleich Null sein muss, oder, dass diese n Ableitungen nicht von einander unabhängig sein können. Setzt man $t = \mathfrak{r} = 2, 3, \dots n$, ferner nach (42.) $\Phi_{\mathfrak{r}} = \frac{\partial P}{\partial c_{\mathfrak{r}}}$, und verbindet die Gleichungen (45.) und (46.), so entsteht das System von n Gleichungen

$$(49.)\qquad \begin{cases} \sum_a \frac{\partial P}{\partial x_a}\xi_a = 1, \\ \sum_a \frac{\partial \Phi_{\mathfrak{r}}}{\partial x_a}\xi_a = 0; \end{cases}$$

da nun vorausgesetzt ist, dass die Functionen P, $\Phi_{\mathfrak{r}}$ in Bezug auf die Variabelen x_a von einander unabhängig sind, so zieht das System (49.) die Gleichungen

$$(50.)\qquad \xi_a = \frac{\partial x_a}{\partial P}$$

nach sich. Demgemäss folgt aus (40.) die Gleichung (43.), und aus (46.) die Gleichung (44.), welche Gleichungen bewiesen werden sollten *).

7.

Wie man so eben gesehen hat, erfüllt das in (42.) definirte System von Variabelen P, $\Phi_{\mathfrak{r}}$ die Bedingungen, welche in dem Theorem des Artikels 5.

*) Es ist leicht einzusehen, dass, wenn man die Function P mit $(n-1)$ unabhängigen Functionen der $(n-1)$ Functionen $\frac{\partial P}{\partial c_{\mathfrak{r}}}$ verbindet, auch für dieses System von neuen Variabelen der gelieferte Beweis in Kraft bleibt; doch habe ich diese Verallgemeinerung absichtlich nicht in die Formeln des Textes eingeführt. *Gauss* bezeichnet den ganzen Umfang der willkürlichen Functionen bei seinem Problem *disqu. gen. circa superf. curv.* art. 22.

beziehungsweise für das System von Variabelen y_1, $y_\mathfrak{r}$ vorausgesetzt werden. Also wird das System von Differentialgleichungen (3^b.) durch die $(n-1)$ Gleichungen

$$(51.) \qquad \Phi_\mathfrak{r} = \Phi_\mathfrak{r}(0)$$

integrirt, wo das Anhängen der Null, wie früher, die Substitution der Werthe $x_\mathfrak{a} = x_\mathfrak{a}(0)$ andeutet. Ferner giebt die Gleichung (39.), unter der Voraussetzung, dass $\frac{dP}{dt}$ positiv ist, oder dass P auf dem Wege der Integration stets zunimmt, für den Werth R die Bestimmung

$$(52.) \qquad R = P - P(0).$$

Die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial P}$, bei denen $\Phi_2, \Phi_3, \ldots \Phi_n$ constant bleiben, sind demnach gleich den Differentialquotienten $\frac{dx_\mathfrak{a}}{dR}$, die sich auf die Integration des Systems (3^b.) beziehen; aus (50.) folgen auf diese Weise die Gleichungen

$$(53.) \qquad \xi_\mathfrak{a} = \frac{dx_\mathfrak{a}}{dR},$$

aus (41.) die Gleichungen

$$(54.) \qquad \frac{\partial P}{\partial x_\mathfrak{a}} = \frac{\partial \left(F\left(\frac{dx}{dR}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\partial \left(\frac{dx_\mathfrak{a}}{dR}\right)}.$$

Bei den Gleichungen (53.) ist die Gleichung (46.) eine nothwendige Voraussetzung; für die Verhältnisse der Grössen $\xi_\mathfrak{a}$, welche durch die Gleichungen (41.) ohne diese Voraussetzung bestimmt sind, gelten die Gleichungen

$$(53^*.) \qquad \frac{\xi_\mathfrak{c}}{\xi_{\mathfrak{c}_1}} = \frac{\frac{dx_\mathfrak{c}}{dR}}{\frac{dx_{\mathfrak{c}_1}}{dR}}.$$

Denselben entsprechen die aus (54.) abgeleiteten Gleichungen

$$(54^*.) \qquad \frac{\frac{\partial P}{\partial x_\mathfrak{c}}}{\frac{\partial P}{\partial x_{\mathfrak{c}_1}}} = \frac{\frac{\partial F\left(\frac{dx}{dR}\right)}{\partial \left(\frac{dx_\mathfrak{c}}{dR}\right)}}{\frac{\partial F\left(\frac{dx}{dR}\right)}{\partial \left(\frac{dx_{\mathfrak{c}_1}}{dR}\right)}}.$$

Aus den $(n-1)$ Integralen (51.) des Systems (3^b.) kann eine vollständige Integration desselben abgeleitet werden, die den in Artikel 1. gestellten Bedingungen genügt. Zu diesem Ende hat man in (53*.) oder (54*.) die Werthsysteme $x_a = x_a(0)$, $x'_a = x'_a(0)$ zu substituiren und bekommt, da in den Ausdrücken rechts $\frac{dx_a}{dR}$ durch $\frac{dx_a}{dt}$ ersetzt werden darf, respective die Systeme von Gleichungen

$$(53^{**}.)\quad \frac{\xi_\iota(0)}{\xi_{\iota_1}(0)} = \frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}.$$

$$(54^{**}.)\quad \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x_\iota}\right)_0}{\left(\frac{\partial P}{\partial x_{\iota_1}}\right)_0} = \frac{\frac{\partial F_a(x'(0))}{\partial x'_\iota(0)}}{\frac{\partial F_a(x'(0))}{\partial x'_{\iota_1}(0)}}.$$

Vermöge des einen oder des anderen Systems sind die Constanten c_r als Functionen der Verhältnisse $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ darzustellen und in die Gleichungen (51.) zu substituiren; dann bestimmen diese die gesuchte Abhängigkeit der $(n-1)$ Variabelen x_ι von der übrig bleibenden Variabele x_{ι_1}.

Die Gleichungen (14.) und (14*.) geben an, wie die ausgeführte Integration des Systems (3^b.) zu der Ausführung der entsprechenden vollständigen Integration des Systems (3^a.) angewendet werden kann, und damit ist die Methode *Jacobis* begründet, vermöge deren ein vollständiges Integral der Forderung (40.) eine vollständige Integration des Systems von Differentialgleichungen (3^a.) liefert.

In dem Falle, dass die Coefficienten der Form $F(dx)$ constant sind, wird das System (3^b.) dadurch integrirt, dass man die Verhältnisse $\frac{x'_\iota}{x'_{\iota_1}}$ gleich den constanten Anfangswerthen $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ setzt und hieraus die Gleichungen

$$(55.)\quad \frac{x_\iota - x_\iota(0)}{x_{\iota_1} - x_{\iota_1}(0)} = \frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$$

deducirt. Demnach werden die Ausdrücke auf der rechten Seite von (54.), wo die Werthe x_a das System (3^b.) integriren, gleich Constanten, und es entsteht das Resultat, dass die Gleichungen

$$(56.)\quad \frac{\partial P}{\partial x_a} = \left(\frac{\partial P}{\partial x_a}\right)_0,$$

von denen $(n-1)$ die übrig bleibende zur Folge haben, ein System von $(n-1)$ Integralen des Systems von Differentialgleichungen (3^b.) bilden, welches mit dem System von $(n-1)$ Integralen (51.) äquivalent ist.

5.

Die Gleichung (52.) eröffnet einen neuen Gesichtspunkt zur Betrachtung der $(n-1)$ Integrale (51.) bei einer beliebigen Form $F(dx)$.

Ich fasse die Anfangswerthe $x_a(0)$ zusammen, für welche die Function $P(0)$ gleich einem beliebig gewählten festen Werthe A ist; diese Anfangssysteme bilden mithin eine Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Zu jedem System $x_a(0)$ werden die $(n-1)$ Verhältnisse $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ durch die Gleichungen (54**.) bestimmt, und die betreffende Integration des Systems (3^b.) bezeichnet für die Variabelen x_a eine bestimmte Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung. Die Totalität dieser Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung wird durch die $(n-1)$ Integrale (51.) in Verbindung mit der Gleichung

$$(57.)\qquad P(0) = A$$

dargestellt. Wenn man nun diese Mannigfaltigkeiten von den Systemen $x_a(0)$ an in dem Sinne fortsetzt, dass die Function P stets zunimmt, und soweit führt, dass für alle Endsysteme x_a die Gleichung

$$(58.)\qquad P = B$$

gilt, wo B wieder ein fester Werth ist, so lehrt die Gleichung (52.), dass das Integral R in allen denselben Werth

$$(59.)\qquad R = B-A$$

erhält. Gleichzeitig haben die Verhältnisse der Elemente $\frac{x'_\iota}{x'_{\iota_1}}$, welche der Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung von den Endsystemen x_a, $P=B$, entsprechen, die Eigenschaft, die Gleichungen (54*.) zu erfüllen, welche mit den Gleichungen (54**.) von gleicher Gestalt sind.

Wenn man bei der angestellten Ueberlegung statt des Integrals P die Function $R(\mathfrak{x}(0), x)$ substituirt, welche durch die Gleichungen $\mathfrak{x}_a(0) = x_a(0)$, $x_a = x_a$ aus der Function R hervorgeht, und zugleich die Constante A von der positiven Seite gegen die Null abnehmen lässt, so convergirt die Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $R(\mathfrak{x}(0), x(0)) = A$ gegen das einzige Werthsystem $x_a(0) = \mathfrak{x}_a(0)$ *), und das entsprechende Ergebniss wirft ein neues Licht auf die Function $R(\mathfrak{x}(0), x)$ und ihre Ableitungen in Bezug auf die

*) In casu nostro circulus infinite parvus adoptari potest, centrum in eo puncto habens, a quo distantiae *r* numerantur, *disqu. gen. circa superf. curv.*, art. 22.

Constanten $\mathfrak{x}_a(0)$. Diese Ableitungen werden nach (29.) durch die Gleichungen

$$\frac{\partial R(x(0),x)}{\partial x_a(0)} = -\frac{\partial\left(F_0\left(\frac{dx}{dR}\right)_0\right)^{\frac{1}{p}}}{\partial\left(\left(\frac{dx_a}{dR}\right)_0\right)}$$

ausgedrückt, sobald statt der Bezeichnung $\mathfrak{x}_a(0)$ die Bezeichnung $x_a(0)$ eingeführt ist, und stehen in einer einfachen Beziehung zu dem System der Normalvariabelen (22.).

Auf dem eingeschlagenen Wege findet sich auch die Lösung der Aufgabe, wenn das System (3^b.) vollständig integrirt ist, ein Integral P der Forderung (40.) zu ermitteln, bei welchem die Gleichung

$$(60.) \qquad P = A$$

dieselbe Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung für die Variabelen x_a bestimmt wie eine gegebene Gleichung

$$(61.) \qquad \mathfrak{R} = A.$$

Hier bedeutet A, wie früher, einen constanten Werth, $\mathfrak{R}$ eine willkürlich angenommene Function der Variabelen x_a.

Vermöge der Integration des Systems (3^b.) seien die Verhältnisse $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ und die Grösse R, wie in Artikel 3, durch die Systeme von Werthen x_a und $x_a(0)$ ausgedrückt. Man setzt nun fest, dass das Anfangssystem $x_a(0)$ der Gleichung

$$(62.) \qquad \mathfrak{R}(0) = A$$

genüge, und dass die Verhältnisse der Anfangselemente $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ durch die $(n-1)$ Gleichungen

$$(63.) \qquad \frac{\left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x_\iota}\right)_0}{\left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x_{\iota_1}}\right)_0} = \frac{\frac{\partial F_0(x'(0))}{\partial x'_\iota(0)}}{\frac{\partial F_0(x'(0))}{\partial x'_{\iota_1}(0)}}$$

bestimmt werden. Das Fortschreiten der Variabelen x_a in der Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche durch die Integration des Systems (3^b.) bezeichnet ist, geschehe so, dass das Differential $\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right)_0 dt$ positiv wird. Aus den n Gleichungen (62.) und (63.) determinirt man die Grössen $x_a(0)$ als Functionen der Grössen x_a und substituirt diese Ausdrücke in die Function R, welche dadurch in die Function $\overline{R}$ übergehen möge. Dann wird das

gesuchte Integral P durch die Gleichung

$$(64.)\qquad P = \overline{R}+A$$

dargestellt.

Das vollständige Differential der Grösse R, insofern dieselbe von den Werthsystemen x_a und $x_a(0)$ abhängt, ist durch die Gleichung (7[b].) folgendermassen ausgedrückt

$$\delta R = \sum_a \frac{\partial (F(x'))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a}\delta x_a - \sum_a \frac{\partial (F_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0).$$

Die Werthsysteme $x_a(0)$ werden nun durch Functionen der Variabelen x_a ersetzt, welche die Gleichungen (62.) und (63.) erfüllen. In Folge von (63.) ist der Ausdruck $\sum_a \frac{\partial (F_0(x'(0)))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0)$ gleich dem Producte eines Factors in den Ausdruck $\sum_a \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_a}\right)_0 \delta x_a(0)$, in Folge von (62.) ist der Ausdruck $\sum_a \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_a}\right)_0 \delta x_a(0)$ gleich Null. Deshalb gilt für das vollständige Differential der Function $\overline{R}$ die Gleichung

$$(65.)\qquad \delta\overline{R} = \sum_a \frac{\partial (F(x'))^{\frac{1}{p}}}{\partial x'_a}\delta x_a,$$

welche beweist, dass die Function $P = \overline{R}+A$, wie behauptet worden, ein Integral der Forderung (40.) ist. Da die Function $\overline{R}$ verschwindet, sobald die Gleichungen $x_a = x_a(0)$ eintreten, und da die Systeme $x_a(0)$ die Gleichung (62.) befriedigen, so bezeichnet die Gleichung $P = A$ dieselbe Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung für die Variabelen x_a, wie die Gleichung $\mathfrak{R} = A$, und zwar gelten für dieselben dieser Mannigfaltigkeit benachbarten Werthcomplexe x_a die Ungleichheiten $P > A$ und $\mathfrak{R} > A$, weil das Differential $\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right)_0 dt$ positiv vorausgesetzt ist.

Führt man die Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung, welche durch die Integration des Systems (3[b].) bestimmt sind, von den Systemen $x_a(0)$ so weit, dass für alle Endsysteme x_a die Function R denselben Werth

$$(66.)\qquad R = B - A$$

erhält, so gehören alle Endsysteme x_a wegen der Gleichung (64.) zu der Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung

$$(67.)\qquad P = B.$$

Ferner haben die Verhältnisse der Elemente $\frac{x'_\iota}{x'_{\iota_1}}$, welche dieser Mannigfaltigkeit entsprechen, die Eigenschaft, die Gleichungen (54*.) oder die aequivalenten Gleichungen

$$(68.)\qquad \frac{\frac{\partial P}{\partial x_\iota}}{\frac{\partial P}{\partial x_{\iota_1}}} = \frac{\frac{\partial F(x')}{\partial x'_\iota}}{\frac{\partial F(x')}{\partial x'_{\iota_1}}}$$

zu erfüllen.

Die Bestimmung der Verhältnisse der Elemente $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ durch (63.) und der Elemente $\frac{x'_\iota}{x'_{\iota_1}}$ durch (68.) kann durch eine Forderung ersetzt werden, die sich auf das Element des Integrals R oder den Ausdruck $(F(dx))^{\frac{1}{p}}$ bezieht. Betrachtet man in demselben die Grössen x_a als fest und der Gleichung $\mathfrak{R} = A$ genügend, dagegen die Grössen dx_a als veränderlich, und verlangt, dass die vollständige Ableitung von $(F(dx))^{\frac{1}{p}}$ in Betreff der Grössen dx_a verschwinde, während der Ausdruck

$$(69.)\qquad d\mathfrak{R} = \sum_a \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_a} dx_a$$

einen festen positiven Werth annimmt, so sind die Verhältnisse der Grössen dx_a durch die Gleichungen

$$(70.)\qquad \frac{\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_\iota}}{\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_{\iota_1}}} = \frac{\frac{\partial F(dx)}{\partial dx_\iota}}{\frac{\partial F(dx)}{\partial dx_{\iota_1}}}$$

determinirt, und das noch frei bleibende Vorzeichen der *einen* Grösse dx_{ι_1} ist durch die Bedingung $d\mathfrak{R} > 0$ festgestellt. Dann bezeichnen die Elemente dx_a den Anfang einer bestimmten Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche von dem Werthsysteme x_a der Mannigfaltigkeit $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathfrak{R} = A$ ausgeht. Für dieses Sachverhältniss kann man den Ausdruck gebrauchen, *dass die Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung dx_a gegen die Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $\mathfrak{R} = A$ mit Rücksicht auf die Form $F(dx)$ normal sei.* Unter den so definirten Begriff fügt sich das System (63.) und das System (68.). Bei diesen Anwendungen ist zu beachten, dass die Form $F(dx)$ bei nicht constantem U vermöge (9.) das Product des Factors $\left(\frac{p(U+H)}{p-1}\right)^{p-1}$ in

die Form $pf(dx)$ ist, dass dieser Factor sich in den Verhältnissen der Ableitungen $\dfrac{\dfrac{\partial F(dx)}{\partial dx_\iota}}{\dfrac{\partial F(dx)}{\partial dx_{\iota_1}}}$ heraushebt, und dass man deshalb auch zu der Bezeichnung berechtigt ist, dass die Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung $(dx_a)_0$ normal sei gegen die Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $\mathfrak{R}(0) = A$, und die Mannigfaltigkeit dx_a gegen die Mannigfaltigkeit $P = B$, *mit Rücksicht auf die Form* $pf(dx)$.

Wenn man innerhalb der Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $\mathfrak{R} = A$ von dem Werthsysteme x_a nach dem Werthsysteme $x_a + \delta x_a$ fortschreitet, oder, was dasselbe ist, eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung durchläuft, so ist

$$(71.) \qquad \delta\mathfrak{R} = \sum_a \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_a} \delta x_a = 0,$$

und zwischen den Elementen δx_a dieser Mannigfaltigkeit und den Elementen dx_a der gegen $\mathfrak{R} = A$ normalen Mannigfaltigkeit besteht die Gleichung

$$(72.) \qquad \sum_a \frac{\partial F(dx)}{\partial dx_a} \delta x_a = 0.$$

Dieselbe verwandelt sich, wenn durch die Substitution eines beliebigen Systems neuer Variabelen nach (23.) $F(dx) = G(dy)$ wird, in die correspondirende Gleichung $\sum_a \frac{\partial G(dy)}{\partial dy_a} \delta y_a = 0$, und ist in sofern zu der Form $F(dx)$ *covariant*. Nun gilt, wenn die Form $F(dx)$ vom zweiten Grade ist, und nur, wenn sie vom zweiten Grade ist, die Gleichung

$$(73.) \qquad \sum_a \frac{\partial F(dx)}{\partial dx_a} \delta x_a = \sum_a \frac{\partial F(\delta x)}{\partial \delta x_a} dx_a.$$

Also ist in diesem Falle, und nur in diesem Falle, die Beziehung zwischen der Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung dx_a und der Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung δx_a eine gegenseitige, und man darf sagen, *dass die eine gegen die andere mit Rücksicht auf die Form $F(dx)$ normal, oder orthogonal, ist.*

9.

Unter der Voraussetzung, dass die Zahl $p = 2$ ist, sei P ein vollständiges Integral der Forderung (40.) mit den Constanten $c_1, c_2, \ldots c_n$, und man transformire die Form $F(dx)$ durch das in (42.) definirte System von neuen Variabelen

$$P, \quad \frac{\partial P}{\partial c_2} = \Phi_2, \quad \frac{\partial P}{\partial c_3} = \Phi_3, \quad \ldots \quad \frac{\partial P}{\partial c_n} = \Phi_n.$$

Hier ist nach (9.) und (17.) für ein nicht constantes U

$$F(dx) = 2(U+H)\sum_{a,b} a_{a,b}\, dx_a\, dx_b,$$

während für ein constantes U die Substitution (10**.)

$$2(U+H) = 2(U_0+H) = 1$$

gemacht werden muss. Die neue Form ist in Folge der Artikel 4. und 5. das Aggregat aus dP^2 und einer anderen Form, welche nur die Differentiale $d\Phi_2, \dots d\Phi_n$ enthält, und es gilt die Gleichung

$$(74.)\qquad 2(U+H)\sum_{a,b} a_{a,b}\, dx_a\, dx_b = dP^2 + \sum_{r,s} m_{r,s}\, d\Phi_r\, d\Phi_s,$$

wo die Buchstaben r, s die Zahlenreihe $2, 3, \dots n$ bezeichnen. Um die adjungirten Elemente der neuen Form durch die adjungirten Elemente der ursprünglichen Form darzustellen, wie in Artikel 2. für den Fall $n=2$ geschehen ist, setze ich

$$(75.)\qquad |m_{r,s}| = M, \qquad \frac{\partial M}{\partial m_{r,s}} = M_{r,s};$$

ferner ist zu erwägen, dass dem nach (17.) der Form $2f(dx)$ zugehörigen Ausdrucke $\frac{A_{a,b}}{\Delta}$ bei der Form $F(dx)$ der Ausdruck $\frac{A_{a,b}}{2(U+H)\Delta}$ entspricht. Demnach ergeben sich die Transformationsrelationen

$$(76.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2(U+H)}\sum_{a,b}\dfrac{A_{a,b}}{\Delta}\dfrac{\partial P}{\partial x_a}\dfrac{\partial P}{\partial x_b} = 1, \\ \dfrac{1}{2(U+H)}\sum_{a,b}\dfrac{A_{a,b}}{\Delta}\dfrac{\partial P}{\partial x_a}\dfrac{\partial \Phi_r}{\partial x_b} = 0, \\ \dfrac{1}{2(U+H)}\sum_{a,b}\dfrac{A_{a,b}}{\Delta}\dfrac{\partial \Phi_r}{\partial x_a}\dfrac{\partial \Phi_s}{\partial x_b} = \dfrac{M_{r,s}}{M}, \end{cases}$$

von denen die erste mit der *Hamilton*schen partiellen Differentialgleichung (18.) für die Function P und daher auch mit dem Inhalt der Forderung (40.) zusammenfällt. Die linke Seite derselben hat die Eigenschaft, bei der Transformation (23.) in den entsprechend gebildeten Ausdruck für die Form $G(dy)$ überzugehen, und ist, nach der Bezeichnung Herrn *Beltramis*, *der erste Differentialparameter der Function P mit Bezug auf die quadratische Form $F(dx)$*; die Gleichung selbst, welche man als *die der quadratischen Form $F(dx)$ zugehörige Hamiltonsche partielle Differentialgleichung* bezeichnen kann, wird die Gleichung (12.) des dortigen §. 3, sobald $F(dx)$ das Quadrat des Linearelements für die $n$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der Variabelen x_a bedeutet.

Indem ich die Voraussetzung $p=2$ beibehalte, werde ich die Erör-

terungen des vorigen Artikels auf die Begriffe der reellen Mechanik beziehen, die in Art. 2 definirt sind. So entstehen die folgenden Theoreme *).

Theorem III. *Wenn ein vollständiges Integral P der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung* (18.) *mit den Constanten* $c_1, c_2, \dots c_n$ *gegeben ist, wenn man für die Anfangswerthe der Variabelen* $x_a(0)$ *durch die Gleichung* $P(0) = A =$ const. *eine Mannigfaltigkeit der* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung bestimmt, und für die Variabelen* x_a *von jedem Werthsysteme* $x_a(0)$ *eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung ausgehen lässt, welche das System der mechanischen Differentialgleichungen* (3^b.) *integrirt, und gegen die Mannigfaltigkeit* $P(0) = A$ *mit Rücksicht auf die Form* $2f(dx)$ *normal ist, so wird die Gesammtheit dieser Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung durch die* $(n-1)$ *Integrale* $\frac{\partial P}{\partial c_r} = \left(\frac{\partial P}{\partial c_r}\right)_0$ *in Verbindung mit der Gleichung* $P(0) = A$ *ausgedrückt. Setzt man diese Mannigfaltigkeiten in dem Sinne, in dem die Function P zunimmt, so weit fort, dass die Endsysteme* x_a *zu der Mannigfaltigkeit der* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung* $P = B$ $=$ const. *gehören, so sind die bezeichneten Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung gegen die Mannigfaltigkeit* $P = B$ *mit Rücksicht auf die Form* $2f(dx)$ *ebenfalls normal, und das Integral der kleinsten Wirkung nimmt für alle den festen Werth* $R = B - A$ *an.*

Theorem IV. *Die Gleichung* $\mathfrak{R}(0) = A =$ const. *bezeichne für die Anfangswerthe* $x_a(0)$ *eine beliebig gegebene Mannigfaltigkeit der* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung, von jedem Werthsysteme* $x_a(0)$ *erstrecke sich für die Variabelen* x_a, *in dem Sinne, in welchem* $\mathfrak{R} > A$ *wird, eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche das System der mechanischen Differentialgleichungen* (3^b.) *integrirt, und gegen die Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{R}(0) = A$ *mit Rücksicht auf die Form* $2f(dx)$ *normal ist, und zwar soweit, dass das Integral der kleinsten Wirkung R in allen den festen Werth* $B - A$ *erhält. Dann bilden die Endsysteme* x_a *eine Mannigfaltigkeit der* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung, gegen welche die definirten Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung mit Rücksicht auf die Form* $2f(dx)$ *normal sind, und der Ausdruck* $R + A$ *geht durch eine geeignete Substitution in ein Integral P der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung* (18.) *über, das, gleich A gesetzt, die Mannigfaltigkeit der Anfangswerthe* $x_a(0)$, *gleich B gesetzt, die Mannigfaltigkeit der Endwerthe* x_a *darstellt.*

*) Das zweite von diesen Theoremen habe ich unter der Benennung: ***Theorem der analytischen Mechanik*** in der allgemeinen Sitzung der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde vom 7. August 1871 vorgetragen und in den Berichten der Gesellschaft publicirt.

Es leuchtet ein, dass, wenn die Zahl $n = 2$ oder $= 3$ ist, und wenn $2f(dx)$ in dem Sinne der reellen Geometrie das Quadrat des Linearelements auf einer gegebenen Oberfläche oder in dem Raume bedeutet, eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, die gegen eine Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung mit Rücksicht auf die Form $2f(dx)$ normal ist, zu einer Linie wird, die beziehungsweise gegen eine andere Linie in der gegebenen Oberfläche, oder gegen eine Fläche im Raume normal steht. Mithin verwandelt sich das Theorem IV., wenn $n = 2$ und die Kräftefunction U gleich Null ist, in den *Gauss*ischen Satz über die kürzesten Linien auf einer gegebenen Oberfläche, welcher in der Einleitung angeführt ist *).

Da der Begriff einer Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung für die Variabelen x_a, die das System der mechanischen Differentialgleichungen (3^b.) integrirt, nichts anderes bedeutet, als die Art der Abhängigkeit, in welche $(n-1)$ Variabele x_ϵ gegen die übrig bleibende Variabele x_{ϵ_1} treten, sobald die Bewegung des betreffenden Massensystems den gegebenen Anfangszuständen gemäss erfolgt, so nimmt *die durch die Theoreme III. und IV. bezeichnete Gruppirung dieser Anfangszustände* die Aufmerksamkeit in Anspruch. Hier zeigt sich wieder ein bedeutender Unterschied, je nachdem die Kräftefunction in der That vorhanden oder nicht vorhanden ist. Wenn die Kräftefunction nicht vorhanden, d. h. U constant oder Null ist, so bleibt die Integration des Systems Differentialgleichungen (3^b.) völlig ungeändert, wofern man die Anfangswerthe $x_a(0)$ nicht ändert, die Anfangswerthe $x'_a(0)$ aber so ändert, dass die Verhältnisse $\frac{x'_\epsilon(0)}{x'_{\epsilon_1}(0)}$ dieselben bleiben, und dasselbe gilt von dem Integral der kleinsten Wirkung $R = \int_{t_0}^{t} (2f(x'))^{\frac{1}{2}}\,dt$. Wenn dagegen eine Kräftefunction vorhanden, d. h. U nicht constant ist, so bestimmen die absoluten Werthe der Grössen $x'_a(0)$ den Werth der Constante H in dem Integral der lebendigen Kraft (5^a.), und diese Constante erscheint sowohl in dem System Differentialgleichungen (3^b.), als auch in dem Integral der kleinsten Wirkung $R = \int_{t_0}^{t} 2(U+H)^{\frac{1}{2}}(f(x'))^{\frac{1}{2}}\,dt$. Die Gruppirung der Anfangszustände in den Theoremen III. und IV. beschränkt die Werthe $x_a(0)$ durch eine Gleichung, bestimmt zu jedem Werthsysteme $x_a(0)$ die Verhältnisse $\frac{x'_\epsilon(0)}{x'_{\epsilon_1}(0)}$ und

---

*) Disqu. gen. circa superf. curv., art. 16.

setzt, wofern U nicht constant ist, zugleich voraus, dass die Grösse H einen unveränderlichen Werth habe. Diese Gruppirung verfügt also, wenn U constant oder Null ist, *nur* über die Verhältnisse $\frac{x'_\iota(0)}{x'_{\iota_1}(0)}$ und *nicht* über den absoluten Werth der Grössen $x'_a(0)$; sie verfügt aber, wenn U nicht constant ist, über den absoluten Werth der Grössen $x'_a(0)$ in der Weise, dass die Constante H stets denselben Werth haben muss, oder, dass der Uebergang des betreffenden Massensystems aus einem beliebigen von jenen Anfangszuständen in einen anderen beliebigen von denselben durch eine fingirte unter der Einwirkung der Kräftefunction U geschehende Bewegung dem Satze von der lebendigen Kraft (5^a.) nicht widerspricht.

Bonn, den 15. Juli 1871.

Druckfehler.

Seite 141, Ueberschrift des Artikels, statt 5 setze man 8.

Entwickelung eines Zusammenhanges zwischen den quadratischen Formen von *n* Differentialen und den *Abel*schen Transcendenten.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

Der specifische Charakter eines Gebietes in der Theorie der Formen von n Differentialen wird durch die Bedingung ausgedrückt, dass die Coefficienten einer Form von n Differentialen algebraische Functionen der betreffenden Variabelen sind, und dass bei der Transformation einer solchen Form die ursprünglichen Variabelen gleich algebraischen Functionen der neuen Variabelen gesetzt werden. Auf diesem Gebiete liegt die Transformation der Form, welche das Aggregat der Quadrate von den Differentialen der Variabelen $x_1, x_2, \dots x_n$ ist, durch die Substitution der verallgemeinerten elliptischen Coordinaten $y_1, y_2, \dots y_n$. *Jacobi* hat das Wesen der elliptischen Coordinaten und die Ergebnisse von verschiedenen Anwendungen derselben in der Note: *von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution,* Monatsbericht d. Acad. d. Wiss. zu Berlin, 1839, April, und d. Journal Bd. 19, pag. 309, auseinandergesetzt; die Durchführung der bezeichneten Transformation und die Ableitung der in der Note angedeuteten Resultate findet sich in den *Vorlesungen über Dynamik,* Vorlesung 26 bis 30. Jene Transformation erschliesst einen Zusammenhang zwischen den quadratischen Formen von n Differentialen und den *Abel*schen Transcendenten, auf den die gegenwärtige Betrachtung gerichtet ist.

Die Form $2g(dy)$, welche bei der erwähnten Substitution aus der Form $\sum_a dx_a^2$ hervorgeht, ist ein Aggregat von den Producten aus den Quadraten der Differentiale in rationale Functionen der elliptischen Coordinaten $y_1, y_2, \dots y_n$. Die n Gleichungen $y_b = \text{const.}$ bezeichnen daher für die Variabelen x_a n Mannigfaltigkeiten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Eigenschaft haben, dass von den n Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung, die je $(n-1)$ von den n Mannigfaltigkeiten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung gemeinsam angehören, je zwei und zwei *mit Rücksicht auf die Form* $\sum_a dx_a^2$ *gegen einander normal, oder orthogonal,* sind, oder in anderen Worten, die n Gleichungen $y_b = \text{const.}$ bilden ein System von n

Mannigfaltigkeiten der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, die *mit Rücksicht auf die Form* $\sum_a dx_a^2$ *orthogonal* sind. Für die *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung, welche nach der in dem letzten Artikel des vorstehenden Aufsatzes gebrauchten Bezeichnung der Form $2g(dy)$ zugehört, hat *Jacobi* ein vollständiges Integral angegeben. Sobald man aus diesem Integral P das System von neuen Variabelen ableitet, welches in dem genannten Artikel $P, \Phi_2, \Phi_3, \dots \Phi_n$ genannt ist, und mittelst desselben die Form $2g(dy)$ transformirt, so enthält die resultirende Form abermals nur die Quadrate von den Differentialen ihrer Variabelen, und deshalb repräsentirt das successive Constantsetzen dieser n Variabelen ein neues System von n Mannigfaltigkeiten der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, die mit Rücksicht auf die Form $2g(dy)$, oder, was dasselbe ist, mit Rücksicht auf die aequivalente Form $\sum_a dx_a^2$, orthogonal sind. Durch das gleichzeitige Constantsetzen der $(n-1)$ Variabelen $\Phi_2, \Phi_3, \dots \Phi_n$ wird hier diejenige Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung bestimmt, für welche die erste Variation des Integrals $\frac{1}{2}\int \sum_a \left(\frac{dx_a}{dt}\right)^2 dt$ verschwindet. Zu gleicher Zeit wird dieselbe, das isoperimetrische Problem auflösende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung dadurch bestimmt, dass man $(n-1)$ Functionen aus einer gewissen anderen Gruppe von Functionen constante Werthe vorschreibt. Unter den obwaltenden Verhältnissen sind aber die Functionen $P, \Phi_2, \Phi_3, \dots \Phi_n$ Aggregate von *Abel*schen Integralen, bei denen eine Quadratwurzel aus einer Function des $(2n-1)^{ten}$ Grades auftritt, dagegen die Functionen der erwähnten Gruppe algebraische Functionen der Variabelen $y_1, y_2, \dots y_n$, und die Aequivalenz der beiden Bestimmungen für dieselbe Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung constituirt den Inhalt des *Abel*schen Theorems. Auf diese Weise knüpft sich der von *Jacobi* in den *Vorlesungen über Dynamik* vorgetragene Beweis des *Abel*schen Theorems an die Eigenschaften des Systems von Variabelen $P, \Phi_2, \Phi_3, \dots \Phi_n$, durch welches die Form $2g(dy)$ transformirt worden ist.

Die Frage nach *der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid*, auf n Variabele ausgedehnt, ergiebt das isoperimetrische Problem, dass die erste Variation des Integrals $\frac{1}{2}\int \sum_a \left(\frac{dx_a}{dt}\right)^2 dt$ zum Verschwinden gebracht werden soll, während gewisse l von den elliptischen Coordinaten $y_1, y_2, \dots y_l$ constante Werthe erhalten. An dieses Problem schliesst sich die Aufgabe, solche Grössenverbindungen zu ermitteln, welche sich bei einer beliebigen Trans-

formation der Form $\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}} dx_{\mathfrak{a}}^2$ und der Ersetzung des Systems von Gleichungen $y_1 = \text{const.}$, $y_2 = \text{const.}$, $\dots$ $y_l = \text{const.}$ durch ein äquivalentes System in die entsprechend gebildeten Grössenverbindungen für die neue Form und das neue System verwandeln. Eine Methode, welche bei einer beliebigen quadratischen Form $f(dx)$ und einem System von beliebigen unabhängigen constantzusetzenden Functionen $y_1, y_2, \dots y_l$ dem angegebenen Zwecke dient, ist in dem Aufsatze: *Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen*, d. Journal Bd. 71, pag. 274 und 288, dargestellt. Die einzelnen Schritte jener Methode vereinfachen sich bei der Anwendung auf den vorliegenden Fall bedeutend, weil die Form $2f(dx)$ durch die Form $\sum_{\mathfrak{a}} dx_{\mathfrak{a}}^2$ ersetzt wird, deren Coefficienten constant sind, und weil diese durch die Substitution der elliptischen Coordinaten $y_{\mathfrak{b}}$ in die Form $2g(dy)$ übergeht, deren besondere Beschaffenheit schon hervorgehoben ist. Die Form $2g(dy)$ möge sich durch das Constantsetzen der Variabelen $y_1, y_2, \dots y_l$ in die Form $2\overline{g}(dy)$ der $(n-l)$ Variabelen $y_{l+1}, y_{l+2}, \dots y_n$ verwandeln. Wenn man nun die der Form $2\overline{g}(dy)$ zugehörige *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung aufstellt, so liefert *Jacobis* Verfahren ein vollständiges Integral derselben, und dadurch eine Auflösung des erwähnten correspondirenden isoperimetrischen Problems *). Aus jenem Integral P bilde man nach den Vorschriften des vorstehenden Aufsatzes das System von $(n-l)$ Functionen $P, \Phi_{l+2}^{(l)}, \dots \Phi_n^{(l)}$, die sämmtlich wieder Aggregate von solchen *Abel*schen Integralen sind, bei denen eine Quadratwurzel aus einer Function des $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grades vorkommt, und führe diese Functionen als neue Variabele in die Form $2\overline{g}(dy)$ ein. Alsdann wiederholt sich die Erscheinung, dass die neue Form nur die Quadrate von den Differentialen ihrer Variabelen enthält.

1.

Bei der Darstellung der elliptischen Coordinaten $y_1, y_2, \dots y_n$ wird vorausgesetzt, dass die reellen Grössen $a_1, a_2, \dots a_n$ den Ungleichheiten

$$(1.)\qquad a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n$$

genügen, und dass für ein indefinites y

$$(2.)\qquad \chi(y) = (y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_n),$$

$$(3.)\qquad \mathfrak{Q}(y) = (y-a_1)(y-a_2)\dots(y-a_n)$$

*) Eine andere Methode zur Integration des betreffenden Systems von Differentialgleichungen für den Fall $l=1$ ist in dem Aufsatze des Herrn *Weierstrass: über die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid*, Monatsbericht d. Berl. Acad., 1861, October, mitgetheilt.

ist. Nun giebt die Zerlegung des rationalen Bruches $\frac{\chi(y)}{\Omega(y)}$ in Partialbrüche, wenn $\Omega'(y) = \frac{d\Omega(y)}{dy}$ ist, die Gleichung

$$(4.)\quad \frac{\chi(y)}{\Omega(y)} = 1+\sum_{\mathfrak{e}} \frac{\chi(a_{\mathfrak{e}})}{\Omega'(a_{\mathfrak{e}})}\frac{1}{y-a_{\mathfrak{e}}}.$$

Wenn in derselben statt y die Grösse z substituirt, und die ursprüngliche Gleichung von der hieraus resultirenden subtrahirt wird, so entsteht die Relation

$$(5.)\quad \frac{\chi(z)}{\Omega(z)}-\frac{\chi(y)}{\Omega(y)} = \sum_{\mathfrak{e}} \frac{\chi(a_{\mathfrak{e}})}{\Omega'(a_{\mathfrak{e}})}\frac{-z+y}{(z-a_{\mathfrak{e}})(y-a_{\mathfrak{e}})}.$$

Sobald man hier für z und y zwei verschiedene Grössen $y_{\mathfrak{b}}$ und $y_{\mathfrak{a}}$ einsetzt, so wird die rechte Seite durch den nicht verschwindenden Factor $-y_{\mathfrak{b}}+y_{\mathfrak{a}}$ theilbar, und der andere Factor muss gleich Null sein. Wenn dagegen $y = y_{\mathfrak{a}}$ ist, und z gegen die Grenze $y_{\mathfrak{a}}$ convergirt, so nähert sich die linke Seite dem Ausdrucke $\frac{\chi'(y_{\mathfrak{a}})}{\Omega(y_{\mathfrak{a}})}(z-y_{\mathfrak{a}})$, die rechte Seite dem Ausdrucke $\sum_{\mathfrak{e}} \frac{\chi(a_{\mathfrak{e}})}{\Omega'(a_{\mathfrak{e}})}\frac{-z+y_{\mathfrak{a}}}{(y_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{e}})^2}$. Demnach bestehen die beiden Gleichungen

$$(6.)\quad \sum_{\mathfrak{e}} \frac{\chi(a_{\mathfrak{e}})}{\Omega'(a_{\mathfrak{e}})}\frac{1}{(y_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{e}})(y_{\mathfrak{b}}-a_{\mathfrak{e}})} = 0,\qquad \mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b},$$

$$(7.)\quad \sum_{\mathfrak{e}} \frac{\chi(a_{\mathfrak{e}})}{\Omega'(a_{\mathfrak{e}})}\frac{1}{(y_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{e}})^2} = -\frac{\chi'(y_{\mathfrak{a}})}{\Omega(y_{\mathfrak{a}})}.$$

Dieselben gelten auch dann noch, wenn die Function $\chi(y)$ von niedrigerem Grade ist, als die Function $\Omega(y)$, weil in diesem Falle zwar die Gleichung (4.), aber nicht die Gleichung (5.) geändert wird.

Es möge die Lage der reellen Grössen $y_{\mathfrak{a}}$ gegen die reellen Grössen $a_{\mathfrak{b}}$ durch die Ungleichheiten

$$(8.)\quad y_1 > a_1 > y_2 > a_2 > \dots > y_n > a_n$$

bestimmt sein. Für diese Voraussetzung erhalten die Variabelen $x_{\mathfrak{e}}$, welche mit den elliptischen Coordinaten $y_{\mathfrak{a}}$ durch die Gleichungen

$$(9.)\quad x_{\mathfrak{e}}^2 = -\frac{\chi(a_{\mathfrak{e}})}{\Omega'(a_{\mathfrak{e}})}$$

verbunden sind, sämmtlich reelle Werthe. Die Gleichung (4.) verwandelt sich in die Gleichung

$$(10.)\quad \frac{\chi(y)}{\Omega(y)} = 1-\sum_{\mathfrak{e}} \frac{x_{\mathfrak{e}}^2}{y-a_{\mathfrak{e}}}.$$

Um jetzt die quadratische Form $\sum_{\mathfrak{e}} dx_{\mathfrak{e}}^2$ durch Substitution der Variabelen $y_{\mathfrak{b}}$ zu transformiren, hat man durch Differentiation von (9.) die Gleichungen

$$(11.)\quad \frac{2dx_t}{x_t} = \frac{dy_1}{y_1-a_t}+\frac{dy_2}{y_2-a_t}+\cdots+\frac{dy_n}{y_n-a_t},$$

und diese liefern die Gleichung

$$(12.)\quad \sum_t dx_t^2 = \tfrac{1}{4}\sum_t x_t^2 \sum_{a,b} \frac{dy_a\,dy_b}{(y_a-a_t)(y_b-a_t)}.$$

Hieraus folgt aber durch Vermittelung von (9.), (6.), (7.) die Transformation

$$(13.)\quad \sum_t dx_t^2 = \tfrac{1}{4}\sum_t \frac{\chi'(y_t)}{\Omega(y_t)} dy_t^2.$$

Wenn man in dem ersten Artikel des vorstehenden Aufsatzes annimmt, dass die Zahl $p=2$, die Form $f(dx)=\frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$, die Function $U=0$ ist, so wird das Integral, dessen erste Variation für constante Anfangs- und Endwerthe der Variabelen x_a verschwinden soll

$$(14.)\quad \Theta = \int_{t_0}^{t} \tfrac{1}{2}\sum_a \left(\frac{dx_a}{dt}\right)^2 dt,$$

die Form

$$(15.)\quad F(dx) = 2f(dx) = \sum_a dx_a^2,$$

da sIntegral

$$(16.)\quad R = \int_{t_0}^{t} \left(\sum_a \left(\frac{dx_a}{dt}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt,$$

und, weil das aus der Formel (3^a.) der vorst. Abh. hervorgehende System Differentialgleichungen durch die bekannten Ausdrücke $x_a = x_a(0)+x'_a(0)(t-t_0)$ integrirt wird

$$(16^*.)\quad R = \left(\sum_a (x_a - x_a(0))^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner ist die der Form $\sum_a dx_a^2$ zugehörige *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung für die Function P

$$(17.)\quad \sum_a \left(\frac{\partial P}{\partial x_a}\right)^2 = 1.$$

Die Form $f(dx)$ wird durch die Einführung der Variabelen y_b in die Form $g(dy)$ transformirt, welche nur die Quadrate von den Differentialen enthält, oder, es ist, in Zeichen

$$(18.)\quad f(dx) = g(dy),$$

$$(19.)\quad g(dy) = \tfrac{1}{2}\sum_a e_a\,dy_a^2;$$

ferner ist

$$(20.)\quad F(dx) = G(dy),$$

$$(21.)\quad G(dy) = 2g(dy) = \sum_a e_a\,dy_a^2,$$

die der Form $G(dy)$ zugehörige *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung für die Function P lautet

$$(22.)\qquad \sum_a \frac{1}{e_a}\left(\frac{\partial P}{\partial y_a}\right)^2 = 1,$$

und dem entsprechend verwandelt sich das ganze isoperimetrische Problem. Die Transformationsgleichung (13.) giebt in dem vorliegenden Falle für die Coefficienten e_a der Form $2g(dy)$ die Bestimmung

$$(23.)\qquad e_a = \frac{\chi'(y_a)}{4\Omega(y_a)},$$

und dadurch erhält die Gleichung (22.) die Gestalt

$$(24.)\qquad \sum_a \frac{4\Omega(y_a)}{\chi'(y_a)}\left(\frac{\partial P}{\partial y_a}\right)^2 = 1.$$

Jacobis Verfahren zur Integration dieser partiellen Differentialgleichung beruht auf der Einführung einer beliebigen Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades mit *einer* Variabelen. Dieser Function gebe ich den Ausdruck

$$(25.)\qquad \mathfrak{P}(y) = (y-c_2)(y-c_3)\dots(y-c_n)$$

und setze voraus, dass die reellen constanten Grössen $c_2, c_3, \dots c_n$, oder c_r, in Bezug auf die reellen constanten Grössen a_b und die reellen beweglichen Grössen y_t den folgenden Ungleichheiten genügen

$$(26.)\qquad y_1 > a_1 > c_2 > y_2 > a_2 > c_3 > \cdots > c_n > y_n > a_n.$$

Da der Coefficient von y^{n-1} in $\mathfrak{P}(y)$ den Werth der Einheit hat, so ist nach einem bekannten Satze

$$(27.)\qquad \sum_a \frac{\mathfrak{P}(y_a)}{\chi'(y_a)} = 1.$$

Die Gleichung (24.) kann deshalb durch die Gleichung

$$(28.)\qquad \sum_a \frac{4\Omega(y_a)}{\chi'(y_a)}\left(\frac{\partial P}{\partial y_a}\right)^2 = \sum_a \frac{\mathfrak{P}(y_a)}{\chi'(y_a)}$$

ersetzt werden, und dieser genügt die Voraussetzung

$$(29.)\qquad \frac{\partial P}{\partial y_a} = \sqrt{\frac{\mathfrak{P}(y_a)}{4\Omega(y_a)}}.$$

So entsteht das vollständige Integral

$$(30.)\qquad \begin{cases} P = P_1, \\ P_1 = \sum_t \frac{1}{2}\int_{a_t}^{y_t} \sqrt{\frac{\mathfrak{P}(y_t)}{\Omega(y_t)}}\,dy_t + c_1, \end{cases}$$

mit den n willkürlichen Constanten $c_1, c_2, \dots c_n$. Die unter den Quadratwurzelzeichen auftretenden Functionen sind in Folge der Ungleichheiten (26.) innerhalb der Grenzen der Integrationen sämmtlich positiv, mithin die Werthe der betreffenden Radicale reell. Jedes Radical wird nach dem Vorgange des Herrn *Weierstrass**) als das Product aus den Radicalen $\sqrt{(y_a-c_r)}$ und $\sqrt{(y_a-a_b)}$ definirt, und jedes von diesen Elementar-Radicalen entweder gleich einer positiven Grösse, oder gleich dem Product einer positiven Grösse in die imaginäre Einheit i vorausgesetzt; dadurch sind die Vorzeichen der vorkommenden reellen Radicale aus den Functionen von höherer als erster Ordnung vollständig bestimmt.

2.

Das System von neuen Variabelen, welche nach Artikel 6. der vorstehenden Abhandlung zur Transformation der Form $2g(dy)$ dienen, besteht aus dem Integral P und seinen $(n-1)$ Ableitungen Φ_r in Bezug auf die Constanten c_r. Demnach folgen aus der Darstellung $P=P_1$ in (30.) die Ausdrücke

$$(31.)\quad \begin{cases} P_1 = \sum_a \frac{1}{2}\int_{a_a}^{y_a}\sqrt{\frac{\mathfrak{P}(y_a)}{\mathfrak{Q}(y_a)}}\,dy_a + c_1, \\ \Phi_r = \sum_a -\frac{1}{4}\int_{a_a}^{y_a}\frac{\mathfrak{P}(y_a)}{y_a-c_r}\,\frac{dy_a}{\sqrt{\mathfrak{P}(y_a)\mathfrak{Q}(y_a)}}. \end{cases}$$

Die Einführung dieser Variabelen in die Form $2g(dy)=\sum_a e_a dy_a^2$ producirt, vermöge der Formel (74.) der vorstehenden Abhandlung, weil nach (10**.) d. vorst. Abh. $2(U+H)=1$ zu setzen ist, und in Folge der obigen Gleichungen (18.) und (19.), die Transformationsgleichung

$$(32.)\quad \sum_a e_a dy_a^2 = dP_1^2 + \sum_{r,s} m_{r,s}\, d\Phi_r\, d\Phi_s,$$

wo die Indices r, s von 2 bis n gehen. In Folge von (75.) und (76.) d. vorst. Abh. erhalten dann die adjungirten Elemente $M_{r,s}$, durch die Determinante M dividirt, die Bestimmung

$$(33.)\quad \frac{M_{r,s}}{M} = \sum_a \frac{1}{e_a}\frac{\partial\Phi_r}{\partial y_a}\frac{\partial\Phi_s}{\partial y_a}.$$

Nun ist in dem gegenwärtigen Falle wegen (31.)

$$\frac{\partial\Phi_r}{\partial y_a} = -\frac{1}{4}\frac{\mathfrak{P}(y_a)}{y_a-c_r}\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{P}(y_a)\mathfrak{Q}(y_a)}},$$

*) *Zur Theorie der Abelschen Functionen,* d. Journal Bd. 47, pag. 289, art. 2.

und wegen (23.)

$$\frac{1}{e_a} = \frac{4\mathfrak{Q}(y_a)}{\chi'(y_a)};$$

deshalb folgt aus (33.) die Gleichung

$$(34.)\qquad \frac{M_{\mathfrak{r},\mathfrak{s}}}{M} = \sum_a \tfrac{1}{4}\frac{\mathfrak{P}(y_a)}{\chi'(y_a)}\,\frac{1}{(y_a-c_\mathfrak{r})(y_a-c_\mathfrak{s})}.$$

Oben ist erwähnt worden, dass die Formeln (6.) und (7.) des ersten Artikels gültig bleiben, wenn die Zählerfunction $\chi(y)$ von niedrigerem Grade ist als die Nennerfunction $\mathfrak{Q}(y)$. Man darf deshalb in diesen Formeln gleichzeitig $\mathfrak{Q}(y)$ durch $\chi(y)$, $\chi(y)$ durch $\mathfrak{P}(y)$, mithin die n Grössen $a_\mathfrak{t}$ durch die n Grössen $y_\mathfrak{t}$, die n Grössen y_a durch die $(n-1)$ Grössen $c_\mathfrak{r}$ ersetzen. Dann liefern (6.) und (7.), auf (34.) angewendet, die Gleichungen

$$(35.)\qquad \frac{M_{\mathfrak{r},\mathfrak{s}}}{M} = 0, \qquad \mathfrak{r} \gtrless \mathfrak{s},$$

$$(36.)\qquad \frac{M_{\mathfrak{r},\mathfrak{r}}}{M} = -\frac{\mathfrak{P}'(c_\mathfrak{r})}{4\chi(c_\mathfrak{r})}.$$

Demnach ist

$$(37.)\qquad \begin{cases} m_{\mathfrak{r},\mathfrak{s}} = 0, \qquad \mathfrak{r} \gtrless \mathfrak{s}, \\ m_{\mathfrak{r},\mathfrak{r}} = -\dfrac{4\chi(c_\mathfrak{r})}{\mathfrak{P}'(c_\mathfrak{r})}, \end{cases}$$

und die Gleichung (32.) erhält die Gestalt

$$(38.)\qquad \sum_a \frac{\chi'(y_a)}{4\mathfrak{Q}(y_a)}dy_a^2 = dP_1^2 + \sum_\mathfrak{r} -\frac{4\chi(c_\mathfrak{r})}{\mathfrak{P}'(c_\mathfrak{r})}d\Phi_\mathfrak{r}^2.$$

Da die neue Form wieder nur aus den Quadraten der n Differentiale dP_1, $d\Phi_\mathfrak{r}$ gebildet ist, so stellen die n Gleichungen $P_1 = \text{const.}$, und $\Phi_\mathfrak{r} = \text{const.}$, ein System von n Mannigfaltigkeiten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung dar, die mit Rücksicht auf die Form $2g(dy)$ und deshalb auch mit Rücksicht auf die Form $\sum_a dx_a^2$ orthogonal sind. Das System Differentialgleichungen, welches bei dem Problem, die erste Variation des Integrals (14.) zum Verschwinden zu bringen, dem System (3^b.) der vorst. Abh. entspricht, wird durch die $(n-1)$ Gleichungen

$$(39.)\qquad \Phi_\mathfrak{r} = \Phi_\mathfrak{r}(0)$$

integrirt. Wenn man nun festsetzt, dass die Anfangswerthe $x_a(0)$ der durch die Gleichung $P_1(0) = A = \text{const.}$ bestimmten Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung angehören sollen, so repräsentiren die Gleichungen (39.) in Verbindung mit der Gleichung $P_1(0) = A$ die Gesammtheit der Mannigfaltigkeiten

der ersten Ordnung, die das genannte System (3^b.) der vorst. Abh. integriren, und die gegen die Mannigfaltigkeit $P_1(0)=A$ mit Rücksicht auf die Form $\sum_a dx_a^2$ normal sind. Führt man diese Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung in dem Sinne, in welchem die Function P zunimmt, soweit fort, dass die Endsysteme x_a der Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $P_1=B=\text{const.}$ angehören, so sind die Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung gegen diese Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $P_1=B$ mit Rücksicht auf die Form $\sum_a dx_a^2$ ebenfalls normal, und das Integral R, welches gegenwärtig nach (16*.) gleich dem Ausdrucke $(\sum_a (x_a-x_a(0))^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, bekommt nach dem Theorem IV. der vorst. Abh. für alle bezeichneten Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung den festen Werth $R=B-A$. Die Bedeutung dieses Resultats für den Fall, dass die Zahl n gleich 2 oder gleich 3 ist, und dass beziehungsweise x_1, x_2 die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in der Ebene, oder x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in dem Raume sind, ergiebt sich aus dem bisher Gesagten von selbst.

3.

Bei dem in Rede stehenden isoperimetrischen Problem ist nach (15.) die Form $F(dx)=\sum_a dx_a^2$ eine Form mit constanten Coefficienten. Daher findet hier die am Schlusse von Artikel 7. der vorst. Abh. gemachte Bemerkung eine Anwendung, dass die Gleichungen

$$(40.)\quad \frac{\partial P_1}{\partial x_a}=\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_a}\right)_0,$$

von denen $(n-1)$ die übrig bleibende zur Folge haben, und wo nach (30.) P durch P_1 ersetzt ist, ein System von $(n-1)$ Integralen des dortigen Systems von Differentialgleichungen (3^b.) bilden, und dass dieses System von $(n-1)$ Integralen mit dem System von $(n-1)$ Integralen (39.) äquivalent ist. Die Abhängigkeit der n Ableitungen $\frac{\partial P_1}{\partial x_a}$ von einander wird dargestellt, indem man bei der *Hamilton*schen partiellen Differentialgleichung (17.) die Substitution $P=P_1$ anwendet. Um die partiellen Ableitungen der Variabelen y_t nach den Variabelen x_a auszudrücken, multiplicire man die Gleichung (11.) mit dem Factor $\frac{x_e^2}{y_t-a_e}$ und summire nach dem Buchstaben e von 1 bis n, so kommt vermöge der Formeln (6.), (7.), (9.) die Gleichung

$$(41.)\quad \sum_e \frac{2x_e\,dx_e}{y_t-a_e}=\frac{\chi'(y_t)}{\Omega(y_t)}dy_t,$$

und daher die Bestimmung

$$(42.)\qquad \frac{\partial y_\mathfrak{t}}{\partial x_\mathfrak{t}} = \frac{\mathfrak{Q}(y_\mathfrak{t})}{\chi'(y_\mathfrak{t})}\frac{2x_\mathfrak{t}}{y_\mathfrak{t}-a_\mathfrak{t}}.$$

Aus der Definition von P_1 in (30.) folgen die Ableitungen

$$(43.)\qquad \frac{\partial P_1}{\partial y_\mathfrak{t}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{P}(y_\mathfrak{t})}{\mathfrak{Q}(y_\mathfrak{t})}},$$

und deshalb nehmen die Ableitungen $\frac{\partial P_1}{\partial x_\mathfrak{a}}$ in (40.) diese Gestalt an

$$(44.)\qquad \frac{\partial P_1}{\partial x_\mathfrak{a}} = \sum_\mathfrak{t}\frac{\partial P_1}{\partial y_\mathfrak{t}}\frac{\partial y_\mathfrak{t}}{\partial x_\mathfrak{a}} = \sum_\mathfrak{t}\frac{\sqrt{\mathfrak{P}(y_\mathfrak{t})\mathfrak{Q}(y_\mathfrak{t})}}{\chi'(y_\mathfrak{t})}\frac{x_\mathfrak{a}}{y_\mathfrak{t}-a_\mathfrak{a}}.$$

Wenn man diese Ausdrücke und die Ausdrücke der Functionen $\Phi_\mathfrak{r}$ in (31.), sowie die Definitionen der Functionen $\mathfrak{P}(y)$, $\mathfrak{Q}(y)$, $\chi(y)$, $x_\mathfrak{a}$ zusammenstellt,

$$(45.)\qquad \begin{cases} \Phi_\mathfrak{r} = \sum_\mathfrak{a} -\tfrac{1}{2}\int_{a_\mathfrak{a}}^{y_\mathfrak{a}} \frac{\mathfrak{P}(y_\mathfrak{a})}{y_\mathfrak{a}-c_\mathfrak{r}}\frac{dy_\mathfrak{a}}{\sqrt{\mathfrak{P}(y_\mathfrak{a})\mathfrak{Q}(y_\mathfrak{a})}},\\ \frac{\partial P_1}{\partial x_\mathfrak{t}} = \sum_\mathfrak{a}\frac{\sqrt{\mathfrak{P}(y_\mathfrak{a})\mathfrak{Q}(y_\mathfrak{a})}}{\chi'(y_\mathfrak{a})}\frac{x_\mathfrak{t}}{y_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{t}},\\ \mathfrak{P}(y) = (y-c_2)(y-c_3)\dots(y-c_n),\\ \mathfrak{Q}(y) = (y-a_1)(y-a_2)\dots(y-a_n),\\ \chi(y) = (y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_n),\\ x_\mathfrak{t} = \frac{\sqrt{-\chi(a_\mathfrak{t})}}{\sqrt{\mathfrak{Q}'(a_\mathfrak{t})}}, \end{cases}$$

so lehrt die Aequivalenz zwischen den Gleichungen (39.) und (40.), dass das von *Jacobi* aufgestellte System von Differentialgleichungen zwischen den n Variabelen $y_\mathfrak{a}$

$$(46.)\qquad d\Phi_\mathfrak{r} = \sum_\mathfrak{a} -\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{P}(y_\mathfrak{a})}{y_\mathfrak{a}-c_\mathfrak{r}}\frac{dy_\mathfrak{a}}{\sqrt{\mathfrak{P}(y_\mathfrak{a})\mathfrak{Q}(y_\mathfrak{a})}},$$

welches zu der Quadratwurzel aus der Function der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung von y

$$(47.)\qquad R(y) = \mathfrak{P}(y)\mathfrak{Q}(y)$$

gehört, durch die Gleichungen $\Phi_\mathfrak{r} = \Phi_\mathfrak{r}(0)$ in transcendenter Form, und durch die Gleichungen $\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_\mathfrak{t}}\right) = \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_\mathfrak{t}}\right)_0$ in algebraischer Form vollständig integrirt wird. *Diese Uebereinstimmung ist aber ein Ausdruck des Abelschen Theorems.*

Durch das Theorem, wie *Abel* dasselbe ausgesprochen hat *), wird zu

*) *Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes,* oeuvres compl., tome I, pag. 288; d. Journal Bd. 3, pag. 313.

den n Variabelen $y_1, y_2, \dots y_n$ eine Function des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$(48.)\qquad \varphi(y) = (y-\eta_2)(y-\eta_3)\dots(y-\eta_n)$$

bestimmt, bei der die $(n-1)$ Grössen $\eta_s = \eta_2, \dots \eta_n$ die Eigenschaft haben, die $(n-1)$ Gleichungen

$$(49.)\qquad -\sum_a \tfrac{1}{4}\int^{y_a} \frac{\mathfrak{P}(y_a)}{y_a - c_\tau}\frac{dy_a}{\sqrt{R(y_a)}} = \sum_s \tfrac{1}{4}\int^{\eta_s} \frac{\mathfrak{P}(\eta_s)}{\eta_s - c_\tau}\frac{d\eta_s}{\sqrt{R(\eta_s)}},$$

welche den Werthen $\tau = 2, 3, \dots n$ entsprechen, zu befriedigen. Hieraus ergiebt sich das obige Resultat vermittelst einer Methode, die von Herrn *Richelot* in der Abhandlung: *Ueber die Integration eines merkwürdigen Systems Differentialgleichungen,* d. Journal Bd. 23, pag. 354, vorgezeichnet ist.

Zu der Determination der Function $\varphi(y)$ dient die Aufgabe, eine Function $\sigma(y)$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade zu finden, welche die Gleichung

$$(50.)\qquad F(y) = -\varphi(y)\chi(y) = (\sigma(y))^2 - R(y)$$

erfüllt. Die Function $\sigma(y)$ ist durch die n Gleichungen

$$(51.)\qquad \sigma(y_a) = \sqrt{R(y_a)}$$

vollständig bestimmt, wo die Radicale $\sqrt{R(y_a)}$ von der linken Seite der Gleichung (49.) her gegeben sind; die Radicale $\sqrt{R(\eta_s)}$ auf der rechten Seite derselben Gleichung werden dann durch die Gleichungen

$$(52.)\qquad \sigma(\eta_s) = \sqrt{R(\eta_s)}$$

eindeutig definirt. Wenn die n Werthe y_a beziehungsweise gegen die Grenzen a_a convergiren, so nähert sich die Function $\sigma(y)$ dem Werthe Null, und die Grössen η_τ nähern sich beziehungsweise den Grössen c_τ. So entsteht unter Vereinigung der Gleichungen (49.) und (31.) die Darstellung der Functionen Φ_τ durch die $(n-1)$ Grössen η_s

$$(53.)\qquad \Phi_\tau = \sum_s \tfrac{1}{4}\int_{c_s}^{\eta_s} \frac{\mathfrak{P}(\eta_s)}{\eta_s - c_\tau}\frac{d\eta_s}{\sqrt{R(\eta_s)}}.$$

In Betreff der Functionen $\frac{\partial P_1}{\partial x_t}$ ist zu bemerken, dass in Folge der Gleichungen (51.) der Quotient $\frac{\sigma(y)}{\chi(y)}$, bei dem der Nenner von der n^{ten}, der Zähler von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, diese Gestalt annehmen kann

$$(54.)\qquad \frac{\sigma(y)}{\chi(y)} = \sum_a \frac{\sqrt{R(y_a)}}{\chi'(y_a)}\frac{1}{y-y_a}.$$

Die Substitution $y = a_t$, in (50.) angewendet, giebt

$$(55.)\qquad -\varphi(a_t)\chi(a_t) = (\sigma(a_t))^2,$$

und deshalb

$$(55^*)\qquad \sqrt{\varphi(a_t)}\sqrt{-\chi(a_t)} = \sigma(a_t).$$

Dieselbe Substitution, in (54.) angewendet, producirt die Gleichung

$$(56.)\qquad \frac{\sigma(a_t)}{\chi(a_t)} = \sum_a \frac{\sqrt{R(y_a)}}{\chi'(y_a)}\,\frac{1}{a_t-y_a};$$

nun hat man vermöge (45.) die Gleichung

$$(57.)\qquad \frac{\partial P_1}{\partial x_t} = \sum_a \frac{\sqrt{R(y_a)}}{\chi'(y_a)}\,\frac{1}{y_a-a_t}\,\frac{\sqrt{-\chi(a_t)}}{\sqrt{\mathfrak{Q}'(a_t)}},$$

also werden die Functionen $\frac{\partial P_1}{\partial x_t}$, wenn man die vorstehende Gleichung mit den Gleichungen (55*.) und (56.) zusammenhält, durch die $(n-1)$ Grössen η_t folgendermassen ausgedrückt

$$(58.)\qquad \frac{\partial P_1}{\partial x_t} = \frac{\sqrt{\varphi(a_t)}}{\sqrt{\mathfrak{Q}'(a_t)}}.$$

Die Gleichungen (53.) zeigen, dass die Gleichungen $\Phi_r = \Phi_r(0)$ das Constantwerden der $(n-1)$ Grössen η_t bewirken, und dieses Constantwerden zieht vermöge der Gleichungen (58.) die Gleichungen $\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_t}\right) = \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_t}\right)_0$ nach sich; hiermit ist aber die beabsichtigte Deduction des aufgestellten Resultats ausgeführt.

Die Ausdrücke der Functionen Φ_r in (53.) und $\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_t}\right)$ in (58.) stimmen vollkommen überein mit gewissen unter den analytischen Ausdrücken, die Herr *Weierstrass* in seiner *Theorie der Abelschen Functionen*, d. Journal Bd. 52, pag. 285, eingeführt hat. Wenn man

die Grössen $c_2, c_3, \dots c_n$ durch die Grössen $a_1, a_2, \dots a_\varrho$,
– – $a_1, a_2, \dots a_n$ – – – $a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \dots a_{2\varrho+1}$,
– – $\eta_2, \eta_3, \dots \eta_n$ – – – $x_1, x_2, \dots x_\varrho$,
die Function $\mathfrak{P}(y)$ durch die Function $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho)$,
– – $\mathfrak{Q}(y)$ – – – $Q(x) = (x-a_{\varrho+1})(x-a_{\varrho+2})\dots(x-a_{2\varrho+1})$,
– – $R(y)$ – – – $R(x) = P(x)\,Q(x)$

ersetzt, und die Constante $A_0 = 1$ annimmt, so verwandeln sich

die Ausdrücke $2\Phi_2, 2\Phi_3, \dots 2\Phi_n$ in die Ausdrücke $u_1, u_2, \dots u_\varrho$,
die Function $\varphi(y) = (y-\eta_2)\dots(y-\eta_n)$ in die Function $\varphi(x) = (x-x_1)\dots(x-x_\varrho)$.

Ferner sind die Ausdrücke $\frac{\partial P_1}{\partial x_t} = \frac{\sqrt{\varphi(a_t)}}{\sqrt{\mathfrak{Q}'(a_t)}}$ *Abelsche Functionen der Argu-*

mente $2\Phi_2, \ldots 2\Phi_n$, im Sinne der von Herrn *Weierstrass* aufgestellten Definition, und zwar gehen unter den erwähnten Voraussetzungen die Ausdrücke

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{Q}'(a_1)}}{\sqrt{\mathfrak{P}(a_1)}}\frac{\partial P_1}{\partial x_1}, \quad \ldots \quad \frac{\sqrt{\mathfrak{Q}'(a_\varepsilon)}}{\sqrt{\mathfrak{P}(a_\varepsilon)}}\frac{\partial P_1}{\partial x_\varepsilon}$$

in die *Abel*schen Functionen

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_{\varrho+1}, \quad \ldots \quad \varphi(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_{2\varrho+1}$$

über, welche auf pag. 309 der angeführten Abhandlung definirt werden. Die Gleichung zwischen den Functionen $\frac{\partial P_1}{\partial x_\varepsilon}$, welche sich, wie schon bemerkt, durch die Substitution $P = P_1$ aus der *Hamilton*schen partiellen Differentialgleichung (17.) ergiebt,

$$(17^*.) \qquad \sum_\varepsilon \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_\varepsilon}\right)^2 = 1,$$

ist eine der linearen Relationen zwischen den Quadraten von $n = \varrho+1$ *Abelschen Functionen*, von denen l. c. pag. 318 die Rede ist. Wenn man dieser Gleichung die Gestalt giebt

$$(17^{**}.) \qquad \sum_\varepsilon \frac{\varphi(a_\varepsilon)}{\mathfrak{Q}'(a_\varepsilon)} = 1,$$

so erscheint sie als die Folge des bekannten Satzes, der auch die obige Formel (27.) geliefert hat.

4.

Ich wende mich jetzt zu der Aufgabe, dass die erste Variation des Integrals

$$(59.) \qquad \int_{t_0}^{t} f\left(\frac{dx}{dt}\right) dt$$

zum Verschwinden gebracht werden soll, während die l beliebigen unabhängigen Functionen $y_1, y_2, \ldots y_l$ der Variabelen x_a constante Werthe annehmen, und setze dabei voraus, dass die quadratische Form $f(dx)$ gleich der Form $\frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$ sei, und dass die Functionen y_α, wo α die Reihe 1, 2, 3, ... l durchläuft, mit den gleichbenannten elliptischen Coordinaten der vorigen Artikel zusammen fallen. Die a. a. O. entwickelte Methode, um bei einer beliebigen quadratischen Form $f(dx)$ und einem System von beliebigen constantzusetzenden Functionen Grössenverbindungen aufzufinden, die sich für eine beliebige Transformation der Form und die Einführung eines äquivalenten Functionen-

systems mitändern, gründet sich auf die Bildung eines Problems *de maximis et minimis*, welches dieselhe Eigenschaft hat. Es seien λ_α l unbestimmte Grössen, welche für das vorliegende Variationsproblem die Rolle der unbestimmten Multiplicatoren von *Lagrange* übernehmen, so haben die Differentialgleichungen des Variationsproblems, nach den in (17.) der vorst. Abh. gewählten Bezeichnungen, die Gestalt

$$(59^*.)\qquad \frac{d\frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt}-\frac{\partial f(x')}{\partial x_a}=\sum_b a_{a,b}\,x''_b+f_a(x')=\sum_\alpha \lambda_\alpha\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_a}.$$

Das Aggregat

$$(60.)\qquad \sum_\alpha \lambda_\alpha\,\delta y_\alpha,$$

bei dem die Variationen δy_α beliebig gewählte, aber feste Werthe erhalten, lässt sich dann vermöge der Gleichungen (19.) und der Gleichungen

$$(61.)\qquad \frac{dy_\alpha}{dt}=0$$

in eine quadratische Form der n Grössen x'_a verwandeln. Das erwähnte Problem *de maximis et minimis* besteht nun darin, dass das erste vollständige Differential dieser Form in Bezug auf die n Grössen x'_a verschwinden soll, während diese Grössen durch das Integral der Differentialgleichungen (59.)

$$(62.)\qquad 2f(x')=1,$$

und die Gleichungen (61.) beschränkt sind. Wenn ω und ϑ_α unbestimmte Factoren bedeuten, so müssen demnach die n Ableitungen des Ausdrucks

$$(63.)\qquad -\tfrac{1}{2}\sum_\alpha \lambda_\alpha\,\delta y_\alpha+\omega f(x')+\sum_\alpha \vartheta_\alpha\frac{dy_\alpha}{dt}$$

nach den Variabelen x'_a gleich Null sein, und hieraus entsteht für die Grösse ω die Gleichung des $(n-l)^{\text{ten}}$ Grades

$$(64.)\qquad D(\omega)=0.$$

Diese Gleichung, deren Wurzeln direct die betreffenden Werthe der Function $\sum_\alpha \lambda_\alpha\delta y_\alpha$ darstellen, enthält den Ursprung der aufzusuchenden Grössenverbindungen. Der Artikel 3. des angeführten Aufsatzes giebt eine mechanische Deutung des Problems *de maximis et minimis*, welche sich den Anschauungen des Artikels 2. der vorstehenden Abhandlung anpasst.

Das aufgestellte Variationsproblem und das aus demselben abgeleitete Problem *de maximis et minimis* werden in Artikel 4. des betreffenden Aufsatzes transformirt, indem man zu den l Functionen y_α $n-l$ beliebige Functionen

$y_{l+1}, y_{l+2}, \dots y_n$ hinzufügt, die mit jenen zusammen ein System von n unabhängigen Functionen y_b bilden, und diese statt der Variabelen x_a substituirt. Die Zeiger $\sigma, \tau, \dots$ bedeuten der Reihe nach die Zahlen $l+1$, $l+2, \dots n$. Durch die angegebene Substitution wird, wie in (23.) der vorst. Abh.

$$f(dx) = g(dy)$$

und

$$(19^a.) \qquad g(dy) = \tfrac{1}{2}\sum_{a,b} e_{a,b}\, dy_a\, dy_b;$$

das System der obigen Gleichungen (59*.) verwandelt sich demnach in das folgende

$$(65.) \quad \begin{cases} \dfrac{d\dfrac{\partial g(y')}{\partial y'_a}}{dt} - \dfrac{\partial g(y')}{\partial y_a} = \sum\limits_b e_{a,b}\, y''_b + g_a(y') = \lambda_a, \\[2ex] \dfrac{d\dfrac{\partial g(y')}{\partial y'_\sigma}}{dt} - \dfrac{\partial g(y')}{\partial y_\sigma} = \sum\limits_b e_{\sigma,b}\, y''_b + g_\sigma(y') = 0. \end{cases}$$

Nun lasse ich die Voraussetzung eintreten, dass die Form $g(dy)$ nur die Quadrate der Differentiale dy_a enthalte, und durch die obige Gleichung (19.)

$$g(dy) = \tfrac{1}{2}\sum_a e_a\, dy_a^2$$

definirt werde. Diese Voraussetzung, welche in dem citirten Aufsatze nicht speciell erörtert ist, kommt darauf hinaus, dass die n Gleichungen $y_a = \text{const.}$ ein System von n Mannigfaltigkeiten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung darstellen, die mit Rücksicht auf die Form $2f(dx)$ orthogonal sind. Aus (19.) und (65.) folgt die Gleichung

$$(66.) \quad \begin{aligned} \frac{d\dfrac{\partial g(y')}{\partial y'_a}}{dt} - \frac{\partial g(y')}{\partial y_a} &= \frac{d(e_a y'_a)}{dt} - \frac{\partial g(y')}{\partial y_a} \\ &= e_a y''_a + g_a(y'), \end{aligned}$$

und deshalb ist

$$(67.) \qquad g_a(y') = \frac{de_a}{dt}\, y'_a - \frac{\partial g(y')}{\partial y_a}.$$

Ferner kommt, weil auf Grund von (61.) die zweiten nach t genommenen Differentialquotienten $y''_a = 0$ sind,

$$(68.) \quad \begin{cases} \qquad g_a(y') = \lambda_a, \\ e_\sigma y''_\sigma + g_\sigma(y') = 0. \end{cases}$$

Also stellt sich das Aggregat (60.) als quadratische Form der Grössen y'_a

folgendermassen dar

$$(69.)\quad \begin{cases} \sum_{a} \lambda_a \delta y_a = 2\mu(y') = \sum_{a,b} \mu_{a,b} y'_a y'_b, \\ \sum_{a,b} \mu_{a,b} y'_a y'_b = \sum_{a} \left(\frac{de_a}{dt} y'_a - \frac{\partial g(y')}{\partial y_a}\right) \delta y_a, \end{cases}$$

und der Ausdruck $-\frac{1}{2}\sum_{a} \lambda_a \delta y_a + \omega f(x')$ aus (63.) wird gleich dem folgenden

$$(63^*.)\quad -\mu(y') + \omega g(y') = -\tfrac{1}{2}\sum_{a} \left(\frac{de_a}{dt} y'_a - \frac{\partial g(y')}{\partial y_a}\right) \delta y'_a + \omega g(y').$$

Hier können die Gleichungen (61.) unmittelbar substituirt werden, es kommt deshalb

$$\frac{de_a}{dt} y'_a - \frac{\partial g(y')}{\partial y_a} = -\tfrac{1}{2}\sum_{\sigma} \frac{\partial e_\sigma}{\partial y_a} y'_\sigma y'_\sigma,$$

$$g(y') = \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma} e_\sigma y'_\sigma y'_\sigma,$$

und somit wird das in Rede stehende Problem de *maximis et minimis* zu der Forderung, dass die $(n-l)$ Ableitungen des Ausdruckes

$$(70.)\quad \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma,\tau} (-\mu_{\sigma,\tau} + \omega e_{\sigma,\tau}) y'_\sigma y'_\tau = \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma} \left(\tfrac{1}{2}\sum_{a} \frac{\partial e_\sigma}{\partial y_a} \delta y_a + \omega e_\sigma\right) y'_\sigma y'_\sigma$$

nach den Grössen y'_σ verschwinden sollen. Die zur Bestimmung der Grösse ω dienende Gleichung $D(\omega) = 0$ wird die Gleichung

$$(71.)\quad \prod_{\sigma=l+1}^{\sigma=n} e_\sigma \prod_{\tau=l+1}^{\tau=n} \left(\omega + \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma} \frac{\partial \log e_\tau}{\partial y_a} \delta y_a\right) = 0,$$

deren linke Seite als ein Product von Factoren des ersten Grades in Bezug auf die Grösse ω auftritt. Setzt man die Grösse ω successive gleich jeder einzelnen Wurzel ω_τ dieser Gleichung

$$(72.)\quad \omega_\tau = -\tfrac{1}{2}\sum_{a} \frac{\partial \log e_\tau}{\partial y_a} \delta y_a,$$

so wird das Problem dadurch aufgelöst, dass die Differentialquotienten y'_{l+1}, $y'_{l+2}, \ldots y'_n$ mit Ausnahme des betreffenden y'_τ die Werthe Null erhalten. Die Verhältnisse der Differentialquotienten y'_σ sind also unabhängig von den beliebig gewählten Werthen der Variationen δy_a, und bezeichnen das Fortschreiten des Werthsystems y_σ in derjenigen Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche dem Constantsetzen der Grössen $y_{l+1}, y_{l+2}, \ldots y_n$ mit Ausnahme der Grösse y_τ entspricht, die der jedes Mal genommenen Wurzel ω_τ zugehört. Der absolute Werth des bezüglichen y'_τ wird vermöge (62.) durch die Gleichung $2g(y') = 1$ bestimmt, die gegenwärtig in die Gleichung $e_\tau y'_\tau = 1$ übergeht, und ω_τ ist der correspondirende Werth des Ausdruckes $\sum_{a} \lambda_a \delta y_a$.

An die Darstellung des Aggregats (60.) als quadratische Form der Grössen x'_a schliesst sich die Bildung *einer Form, die zu der Form $f(dx)$ und dem Systeme von Gleichungen $y_a = const.$ in dem definirten Sinne covariant, und nach vier Systemen von Differentialen linear ist.* Den a. a. O. gebrauchten Bezeichnungen gemäss werden aus $g(dy)$ und der in (69.) definirten Form $\mu(y')$ die bilinearen Formen

$$g(dy, \overset{1}{dy}) = \tfrac{1}{2}\sum_a \frac{\partial g(dy)}{\partial dy_a} \overset{1}{dy}_a,$$

$$\mu(dy, \overset{1}{dy}) = \tfrac{1}{2}\sum_a \frac{\partial \mu(dy)}{\partial dy_a} \overset{1}{dy}_a,$$

die betreffende quadrilineare Form $L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy})$ wird aber so definirt

$$(73.)\qquad L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) = \big(4\mu(dy, \overset{1}{dy})\mu(\overset{2}{dy}, \overset{3}{dy}) - 4\mu(dy, \overset{3}{dy})\mu(\overset{2}{dy}, \overset{1}{dy})\big).$$

Die Einschliessung in eine Klammer deutet an, dass für die Producte $\delta y_a \delta y_\beta$ aus je zweien von den Variationen δy_a respective die endlichen Ausdrücke $\frac{E_{a,\beta}}{E}$ zu substituiren sind, wo E gleich der Determinante $|e_{a,b}|$ und $E_{a,b} = \frac{\partial E}{\partial e_{a,b}}$ ist. In Folge der Gleichung (19.) wird daher gegenwärtig $\delta y_a \delta y_\beta$ durch die Null ersetzt, wenn $a \gtrless \beta$ ist, dagegen $\delta y_a \delta y_a$ durch den Ausdruck $\frac{1}{e_a}$. Vermöge der Gleichungen

$$(74.)\qquad dy_a = 0, \quad \overset{1}{dy}_a = 0, \quad \overset{2}{dy}_a = 0, \quad \overset{3}{dy}_a = 0$$

erhält $2\mu(dy, \overset{1}{dy})$ die einfache Gestalt

$$(75.)\qquad 2\mu(dy, \overset{1}{dy}) = -\sum_a \frac{\partial g(dy, \overset{1}{dy})}{\partial y_a} \delta y_a,$$

und es ist

$$(76.)\qquad L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) = \sum_a \frac{1}{e_a}\Big(\frac{\partial g(dy, \overset{1}{dy})}{\partial y_a}\frac{\partial g(\overset{2}{dy}, \overset{3}{dy})}{\partial y_a} - \frac{\partial g(dy, \overset{3}{dy})}{\partial y_a}\frac{\partial g(\overset{2}{dy}, \overset{1}{dy})}{\partial y_a}\Big).$$

Hier hat man

$$\frac{\partial g(dy, \overset{1}{dy})}{\partial y_a} = \tfrac{1}{2}\sum_\sigma \frac{\partial e_\sigma}{\partial y_a} dy_\sigma \overset{1}{dy}_\sigma,$$

und dadurch entsteht die Darstellung

$$(76^*.)\ L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) = \tfrac{1}{4}\sum_a \frac{1}{e_a}\sum_{\sigma,\sigma'}\frac{\partial e_\sigma}{\partial y_a}\frac{\partial e_{\sigma'}}{\partial y_a}(dy_\sigma \overset{2}{dy}_{\sigma'} - \overset{2}{dy}_\sigma dy_{\sigma'})(\overset{1}{dy}_\sigma \overset{3}{dy}_{\sigma'} - \overset{3}{dy}_\sigma \overset{1}{dy}_{\sigma'}),$$

bei der für σ, σ' alle Paare differenter Zahlen aus der Reihe von $l+1$ bis n zu setzen sind.

Wenn die Form $g(dy)$ durch die Gleichungen $dy_a = 0$ in die Form

$$(19^*.)\qquad \overline{g}(dy) = \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma} e_\sigma dy_\sigma dy_\sigma$$

übergeht, so ist es wesentlich, unter den Grössenverbindungen, die sich mit der Form $f(dx)$ und dem System von Gleichungen $y_a = \text{const.}$ mitändern, diejenigen zu unterscheiden, welche die Eigenschaft haben, bei jeder Transformation der Form $\overline{g}(dy)$ sich entsprechend mitzuverwandeln. Gegenwärtig ist die Form $f(dx) = \frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$ eine Form mit constanten Coefficienten, und in diesem Falle geben die, Bd. 71 d. Journals, pag. 292 u. ff., entwickelten Grundsätze Kenntniss von einigen Grössenverbindungen dieses Charakters. Nach der dortigen Gleichung (13.) wird *die zu* $\overline{g}(dy)$ *covariante quadrilineare Form* $\overline{\Omega}(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy})$, *welche identisch verschwindet oder nicht, je nachdem die betreffende Form* $\overline{g}(dy)$ *in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann, oder nicht,* durch die in (76*.) definirte Form $L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy})$ so ausgedrückt

$$(77.)\qquad -L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) = \tfrac{1}{2}\overline{\Omega}(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}).$$

Aus (76*.) entsteht *eine Invariante der Form* $\overline{g}(dy)$, die an jenem Orte als *eine Verallgemeinerung des Gaussischen Krümmungsmasses* bezeichnet und $-\frac{1}{2}\overline{\omega}$ genannt worden ist, indem das Product der beiden Determinanten von Differentialen durch einen endlichen Ausdruck ersetzt wird, der vermöge der obigen Gleichung (19.) den einfachen Werth $\frac{1}{e_\sigma e_{\sigma'}}$ erhält; demnach ist

$$(78.)\qquad -\tfrac{1}{2}\overline{\omega} = \tfrac{1}{4}\sum_a \frac{1}{e_a}\sum_{\sigma,\sigma'} \frac{\partial \log e_\sigma}{\partial y_a}\frac{\partial \log e_{\sigma'}}{dy_a}.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Zahl $l = 1$ ist, ersetze man auf der linken Seite der Gleichung (71.) den *einen* Ausdruck δy_1 durch den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{e_1}}$, und bilde die Gleichung

$$(79.)\qquad \prod_{\sigma=2}^{\sigma=n} e_\sigma \prod_{\tau=2}^{\tau=n}\left(\omega + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log e_\tau}{\partial y_1}\frac{1}{\sqrt{e_1}}\right) = D_0\omega^{n-l} + D_1\omega^{n-l-1} + \cdots + D_{n-l} = 0,$$

dann sind die Coefficienten gerader Ordnung in der durch D_0 dividirten Function von ω

$$(80.)\qquad \frac{D_2}{D_0},\ \frac{D_4}{D_0},\ \ldots$$

Invarianten der Form $\overline{g}(dy)$. In diesem Falle ist, wie schon früher bemerkt

worden, der Ausdruck $-\frac{\sqrt{e_1}}{\lambda_1}$ gleich derjenigen Grösse, die Herr *Kronecker* in dem Aufsatze *über Systeme von Functionen mehrerer Variabeln*, Monatsbericht der Berliner Akademie 1869, August, mit ϱ bezeichnet hat, die Werthe $\varrho_\tau = -\frac{1}{\omega_\tau} = \frac{2\sqrt{e_1}}{\frac{\partial \log e_\tau}{\partial y_1}}$ aus (72.) werden die $n-1$ ausgezeichneten Werthe der Function ϱ, und

$$\frac{D_{n-1}}{D_0} = \left(\frac{1}{2\sqrt{e_1}}\right)^{n-1} \prod_{\sigma=2}^{\sigma=n} \frac{\partial \log e_\sigma}{\partial y_1}$$

wird diejenige Grösse, die Herr *Kronecker* daselbst als eine *Verallgemeinerung des Gaussischen Krümmungsmasses* erwähnt.

In die allgemeinen Formen des angeführten Aufsatzes ist zuerst die Voraussetzung (19.)

$$g(dy) = \tfrac{1}{2}\sum_a e_a dy_a^2,$$

dann die Voraussetzung

$$f(dx) = \tfrac{1}{2}\sum_a dx_a^2$$

eingeführt worden. Es bleibt jetzt übrig, die besonderen *algebraischen Ausdrücke der Coefficienten* aus (23.)

$$e_a = \frac{\chi'(y_a)}{4\Omega(y_a)} = \frac{(y_a-y_1)(y_a-y_2)\dots(y_a-y_n)}{4(y_a-a_1)(y_a-a_2)\dots(y_a-a_n)}$$

zu substituiren. Vermöge derselben ist

$$(81.)\qquad \frac{\partial \log e_\sigma}{\partial y_a} = -\frac{1}{y_\sigma - y_a}.$$

Daher wird der Ausdruck (70.)

$$\tfrac{1}{2}\sum_\sigma \left(-\sum_a \frac{\delta y_a}{2(y_\sigma - y_a)} + \omega\right) e_\sigma y'_\sigma y'_\sigma,$$

die Gleichung (71.), von dem Factor $\prod_{\sigma=l+1}^{\sigma=n} e_\sigma$ befreit,

$$\prod_{\tau=l+1}^{\tau=n} \left(\omega - \sum_a \frac{\delta y_a}{2(y_\tau - y_a)}\right) = 0,$$

die quadrilineare Form $\overline{\Omega}(dy, \overset{2}{d}y, \overset{1}{d}y, \overset{3}{d}y)$ aus (77.) und (76*.)

$$\overline{\Omega}(dy, \overset{2}{d}y, \overset{1}{d}y, \overset{3}{d}y)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_u' \frac{1}{e_u}\sum_{\sigma,\sigma'} e_\sigma e_{\sigma'} \frac{1}{(y_\sigma - y_u)(y_{\sigma'} - y_u)} (dy_\sigma \overset{2}{d}y_{\sigma'} - \overset{2}{d}y_\sigma dy_{\sigma'})(\overset{1}{d}y_\sigma \overset{3}{d}y_{\sigma'} - \overset{3}{d}y_\sigma \overset{1}{d}y_\sigma),$$

die Invariante $-\frac{1}{2}\overline{\omega}$ aus (78.)

$$-\tfrac{1}{2}\overline{\omega} = \tfrac{1}{4}\sum_{\alpha}\frac{1}{e_\alpha}\sum_{\sigma,\sigma'}\frac{1}{(y_{\sigma'}-y_\alpha)(y_\sigma-y_\alpha)},$$

endlich die Gleichung (79.), die sich auf die Voraussetzung $l=1$ bezieht, von dem Factor $\prod_{\tau=2}^{\tau=n} e_\tau = D_0$ befreit,

$$\prod_{\tau=2}^{\tau=n}\Big(\omega-\frac{1}{2(y_\tau-y_1)\sqrt{e_1}}\Big) = \omega^{n-1}+\frac{D_1}{D_0}\omega^{n-2}+\cdots+\frac{D_{n-1}}{D_0} = 0,$$

und der Coefficient $\frac{D_{n-1}}{D_0}$ in der betreffenden Function von ω

$$\frac{D_{n-1}}{D_0} = \Big(\frac{1}{2\sqrt{e_1}}\Big)^{n-1}\prod_{\sigma=2}^{\sigma=n}\Big(\frac{-1}{y_\sigma-y_1}\Big).$$

5.

Das Variationsproblem des vorigen Artikels geht durch die Einführung der Variabelen y_α und die Berücksichtigung der Gleichungen (61.) in das Problem über, dass die erste Variation des Integrals

$$(59^a.)\qquad \int_{t_0}^{t} \overline{g}(y')\,dt$$

zu Null gemacht werden soll, und die zweite Zeile in (68.) liefert das zugeordnete System von Differentialgleichungen zur Bestimmung der Grössen y_σ, sobald in den Ausdrücken $g_\sigma(y')$ die Differentialquotienten $y'_\alpha=0$ gesetzt werden,

$$(68^a.)\qquad e_\sigma y''_\sigma+g_\sigma(y') = 0.$$

Die *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung, welche der Form

$$\overline{g}(dy) = \sum_\sigma e_\sigma\,dy_\sigma\,dy_\sigma$$

zugehört, ist diese

$$(82.)\qquad \sum_\sigma\frac{1}{e_\sigma}\Big(\frac{\partial P}{\partial y_\sigma}\Big)^2 = 1,$$

und nimmt durch die Substitution der Ausdrücke e_σ aus (23.) die Gestalt an

$$(83.)\qquad \sum_\sigma\frac{4\Omega(y_\sigma)}{\chi'(y_\sigma)}\Big(\frac{\partial P}{\partial y_\sigma}\Big)^2 = 1.$$

Die Ermittelung eines vollständigen Integrals derselben nach *Jacobis* Methode erfordert die Einführung einer Function vom $(n-l-1)^{\text{ten}}$ Grade, welche

$$(84.)\qquad \mathfrak{P}_{n-l-1}(y) = (y-c_{l+2})(y-c_{l+3})\dots(y-c_n)$$

heissen möge, und wo die reellen constanten Grössen $c_{l+2}, c_{l+3}, \dots c_n$ die Ungleichheiten

$$(26^a.)\qquad a_{l+1}>c_{l+2}>y_{l+2}>a_{l+2}>c_{l+3}>\cdots>c_n>y_n>a_n$$

erfüllen. Bei der Function $\chi(y)$ ist der Factor, der die constanten Grössen y_a enthält, und der Factor, der die veränderlichen Grössen y_σ enthält, zu unterscheiden:

$$(85.)\quad \begin{cases} \chi_l(y) = (y-y_1)\dots(y-y_l) \\ \chi_{n-l}(y) = (y-y_{l+1})\dots(y-y_n). \end{cases}$$

In Folge der Gleichung

$$(27^a.)\quad \sum_\sigma \frac{\mathfrak{P}_{n-l-1}(y_\sigma)}{\chi'(y_\sigma)} = 1,$$

die der obigen Gleichung (27.) entspricht, wird aus (83.) die Gleichung

$$(83^*.)\quad \sum_\sigma \frac{4\Omega(y_\sigma)}{\chi'(y_\sigma)}\left(\frac{\partial P}{\partial y_\sigma}\right)^2 = \sum_\sigma \frac{\mathfrak{P}_{n-l-1}(y_\sigma)}{\chi'_{n-l}(y_\sigma)}.$$

Weil nun dieselbe durch die Gleichungen

$$(84.)\quad \frac{\partial P}{\partial y_\sigma} = \sqrt{\frac{\chi_l(y_\sigma)\mathfrak{P}_{n-l-1}(y_\sigma)}{4\Omega(y_\sigma)}}$$

befriedigt wird, so hat man das vollständige Integral mit den willkürlichen Constanten $c_{l+1}, c_{l+2}, c_{l+3}, \dots c_n$,

$$(85.)\quad \begin{cases} P = P_{l+1}, \\ P_{l+1} = \sum_\sigma \frac{1}{2}\int_{a_\sigma}^{y_\sigma} \sqrt{\frac{\chi_l(y_\sigma)\mathfrak{P}_{n-l-1}(y_\sigma)}{\Omega(y_\sigma)}}\,dy_\sigma + c_{l+1}. \end{cases}$$

In Betreff der unter den Quadratwurzelzeichen erscheinenden Functionen und der Bedeutung der Radicale gelten die zu der obigen Formel (30.) gemachten Bemerkungen. Die Anzahl der unter einem Quadratwurzelzeichen vorkommenden Factoren ersten Grades ist auch hier gleich $2n-1$.

Nach Artikel 6. der vorst. Abhandlung ergiebt sich das zu der Transformation der Form $\bar{g}(dy)$ bestimmte System von neuen Variabelen, wenn die Buchstaben ξ, η die Zahlen $l+2$, $l+3$, ... n bedeuten, folgendermassen

$$(86.)\quad \begin{cases} P_{l+1} = \sum_\sigma \frac{1}{2}\int_{a_\sigma}^{y_\sigma} \sqrt{\frac{\chi_l(y_\sigma)\mathfrak{P}_{n-l-1}(y_\sigma)}{\Omega(y_\sigma)}}\,dy_\sigma + c_{l+1}, \\ \Phi_\xi^{(l)} = \frac{\partial P_{l+1}}{\partial c_\xi} = \sum_\sigma -\frac{1}{2}\int_{a_\sigma}^{y_\sigma} \frac{\chi_l(y_\sigma)\mathfrak{P}_{n-l-1}(y_\sigma)}{y_\sigma - c_\xi}\,\frac{1}{\sqrt{\chi_l(y_\sigma)\mathfrak{P}_{n-l-1}(y_\sigma)\Omega(y_\sigma)}}\,dy_\sigma; \end{cases}$$

bei der Transformationsgleichung

$$(87.)\quad \sum_\sigma e_\sigma dy_\sigma^2 = dP_{l+1}^2 + \sum_{\xi,\eta} m_{\xi,\eta}^{(l)}\, d\Phi_\xi^{(l)}\, d\Phi_\eta^{(l)}$$

kommt für die adjungirten Elemente $M^{(l)}_{\xi,\eta}$, durch die Determinante $M^{(l)} = |m^{(l)}_{\xi,\eta}|$ dividirt, die Bestimmung

$$(88.)\quad \frac{M^{(l)}_{\xi,\eta}}{M^{(l)}} = \sum_\sigma \frac{1}{e_\sigma} \frac{\partial \Phi^{(l)}_\xi}{\partial y_\sigma} \frac{\partial \Phi^{(l)}_\eta}{\partial y_\sigma}.$$

Die Substitution der bezüglichen Werthe aus (86.) producirt dann die Gleichungen

$$(88^*.)\quad \frac{M^{(l)}_{\xi,\eta}}{M^{(l)}} = \sum_\sigma \frac{1}{4} \frac{\mathfrak{P}_{n-l-1}(y_\sigma)}{\chi'_{n-l}(y_\sigma)} \frac{1}{(y_\sigma - c_\xi)(y_\sigma - c_\eta)}.$$

Durch dieselben Schlüsse, die auf die obige Gleichung (34.) angewendet sind, wird nun erwiesen, dass die Gleichungen

$$(88^{**}.)\quad \begin{cases} \dfrac{M^{(l)}_{\xi,\eta}}{M^{(l)}} = 0, \quad \xi \gtrless \eta, \\ \dfrac{M^{(l)}_{\xi,\xi}}{M^{(l)}} = -\dfrac{\mathfrak{P}'_{n-l-1}(c_\xi)}{4\chi_{n-l}(c_\xi)} \end{cases}$$

bestehen. Hieraus folgen die Bestimmungen

$$(89.)\quad \begin{cases} m^{(l)}_{\xi,\eta} = 0, \quad \xi \lessgtr \eta, \\ m^{(l)}_{\xi,\xi} = -\dfrac{4\chi_{n-l}(c_\xi)}{\mathfrak{P}'_{n-l-1}(c_\xi)}; \end{cases}$$

durch diese und durch die Werthe e_σ aus (23.) wird aber die Transformationsgleichung (87.) die folgende

$$(90.)\quad \sum_\sigma \frac{\chi'(y_\sigma)}{4\Omega(y_\sigma)} dy_\sigma^2 = dP_{l+1}^2 + \sum_\sigma - \frac{4\chi_{n-l}(c_\xi)}{\mathfrak{P}'_{n-l-1}(c_\xi)} d\Phi^{(l)2}_\xi.$$

Also enthält die Form der Differentiale dP_{l+1}, $d\Phi^{(l)}_\xi$, in welche sich die Form $\bar{g}(dy)$ verwandelt hat, ebenfalls nur die Quadrate der Differentiale. Die Gleichungen $\Phi^{(l)}_\xi = \Phi^{(l)}_\xi(0)$ sind $n-l-1$ Integrale des Systems von Differentialgleichungen (68^a.). Die erwähnte Eigenschaft der resultirenden Form berechtigt nun zu der Aussage, dass die $n-l$ Mannigfaltigkeiten der $(n-l-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $P_{l+1} = \text{const.}$, $\Phi^{(l)}_\xi = \text{const.}$ mit Rücksicht auf die Form $2\bar{g}(dy)$ ein System von orthogonalen Mannigfaltigkeiten bilden. Diese Form $2\bar{g}(dy)$ ist aber unter den vorliegenden Verhältnissen in ein Aggregat von den Quadraten der Differentiale irgend welcher $(n-2)$ Variabelen *nicht* transformirbar, weil die in dem vorigen Artikel gebildete, derselben zugeordnete quadrilineare Form $\bar{\Omega}(dy, \overset{2}{d}y, \overset{3}{d}y, \overset{4}{d}y)$ nicht identisch verschwindet.

Bonn, den 15. Juli 1871.

Die Elemente der Functionenlehre.

(Von Herrn *E. Heine* in Halle a/S.)

Das Fortschreiten der Functionenlehre ist wesentlich durch den Umstand gehemmt, dass gewisse elementare Sätze derselben, obgleich von einem scharfsinnigen Forscher bewiesen, noch immer bezweifelt werden, so dass die Resultate einer Untersuchung nicht überall als richtig gelten, wenn sie auf diesen unentbehrlichen Fundamentalsätzen beruhen. Die Erklärung finde ich darin, dass zwar die Principien des Herrn *Weierstrass*, direct durch seine Vorlesungen und andere mündliche Mittheilungen, indirect durch Abschriften von Heften, welche nach diesen Vorlesungen gearbeitet wurden, selbst in weiteren Kreisen sich verbreitet haben, dass sie aber nicht von ihm selbst in authentischer Fassung durch den Druck veröffentlicht sind, so dass es keine Stelle giebt, an welcher man die Sätze *im Zusammenhange entwickelt* findet. Ihre Wahrheit beruht aber auf der nicht völlig feststehenden Definition der irrationalen Zahlen, bei welcher Vorstellungen der Geometrie, nämlich über die *Erzeugung* einer Linie *durch Bewegung*, oft verwirrend eingewirkt haben. *Die Sätze sind für die unten zu Grunde gelegte Definition der irrationalen Zahlen gültig, bei welcher Zahlen gleich genannt werden, die sich um keine noch so kleine angebbare Zahl unterscheiden, bei welcher ferner der irrationalen Zahl eine wirkliche Existenz zukommt*, so dass eine einwerthige Function für jeden *einzelnen* Werth der Veränderlichen, sei er rational oder irrational, gleichfalls einen *bestimmten* Werth besitzt. Von einem anderen Standpunkte aus können allerdings mit Recht Einwände gegen die Wahrheit der Sätze erhoben werden.

Nicht ohne Bedenken veröffentliche ich diese Arbeit, deren erster, wesentlichster Theil „Ueber Zahlen" bereits seit längerer Zeit vollendet ist. Abgesehen von der erheblichen Schwierigkeit, einen solchen Stoff darzustellen, trug ich Bedenken, eine Arbeit zu veröffentlichen, welche vorzugsweise die mir durch mündliche Mittheilung überkommenen Gedanken Anderer, besonders des Herrn *Weierstrass* enthält, so dass mir wenig mehr als die Durchführung angehört, bei der es darauf ankam, keine irgendwie erhebliche Lücke zu lassen. Hauptsächlich ist es die Nothwendigkeit, mich in einer späteren Ab-

handlung auf die Fundamentalsätze der Functionenlehre zu beziehen, welche mich dennoch zur Veröffentlichung der gegenwärtigen veranlasste, in der ich schliesslich diese Sätze beweise.

Zu besonderem Danke bin ich dem Herrn *Cantor* in Halle für seine mündlichen Mittheilungen verpflichtet, welche einen bedeutenden Einfluss auf die Gestaltung meiner Arbeiten ausübten, indem ich von ihm den Gedanken entlehnte, die allgemeinen Zahlen vermittelst jener besonders geeigneten Reihen einzuführen, die hier (A, §. 1, Def. 1) Zahlenreihen genannt werden. Es scheint mir dies eine, besonders für die Anwendungen auf die Functionenlehre (B, §. 2, Lehrs. 1), glückliche Fortbildung der ursprünglichen Einführungsart, bei welcher die allgemeineren Zahlen durch die in ihnen enthaltenen Vielfachen gewisser Grössen in unendlicher Anzahl bestimmt werden. Die Berechtigung, das durch die Reihen Eingeführte als Zahlengrösse zu betrachten, findet Herr *Cantor* darin, dass es möglich sei, auch hier die Begriffe des Grösser-, Kleiner- und Gleichseins festzustellen.

Die Frage, was eine Zahl sei, beantworte ich, wenn ich nicht bei den rationalen positiven stehen bleiben will, nicht dadurch dass ich die Zahl begrifflich definire, die irrationalen etwa gar als Grenze einführe, deren *Existenz* eine Voraussetzung wäre. Ich stelle mich bei der Definition auf den rein formalen Standpunkt *), *indem ich gewisse greifbare Zeichen Zahlen nenne*, so dass die Existenz dieser Zahlen also nicht in Frage steht. *Ein Hauptgewicht ist auf die Rechenoperation zu legen*, und das Zahlzeichen muss so gewählt, oder mit einem solchen Apparate ausgerüstet werden, dass es einen Anhalt zur Definition der Operationen gewährt.

Rechenoperationen heissen Regeln, nach welchen zwei Zahlen, die durch das Operationszeichen verbunden sind, gegen eine einzige umgetauscht werden können. Diese Regeln werden zunächst so festgesetzt, dass sie das Resultat der gewöhnlichen Rechnung geben, wenn die eingeführten Zahlen allein 0, 1, 2, 3, etc. waren. Die Unmöglichkeit der Subtraction in vielen Fällen veranlasst zur Einführung neuer Zeichen oder Zahlen: für jedes schon vorhandene Zeichen a führt man noch ein Zeichen neg(a) ein, und erweitert die Definition der Operationen in geeigneter Art, so dass sie für die neuen Zeichen noch ein Resultat liefern, an die früheren angebracht, dasselbe wie früher. Dann zeigt

*) Auf die in dieser Einleitung mitgetheilte Art leite ich seit vielen Jahren meine Vorlesungen über algebraische Analysis ein.

sich, nach zweckmässiger Definition der Subtraction, dass $\mathrm{neg}(a) = 0 - a$ sein muss. Die Unmöglichkeit der Division zweier Zeichen a und b, wenn der Quotient nicht eine ganze Zahl ist, veranlasst, Doppelzeichen (a, b) den früheren hinzuzufügen, wobei man die Verbindung mit diesen dadurch herstellt, dass es erlaubt sein soll, $(a, 1)$ mit a zu vertauschen. Erweitert man dann die Erklärung der Multiplication, so zeigt sich, dass (a, b) nichts anderes ist, als das Resultat der Division von $(a, 1)$ durch $(b, 1)$, oder von a durch b. Nunmehr sind für die eingeführten Zahlen die Addition, Subtraction, Multiplication, und im Allgemeinen die Division möglich — nämlich letztere ist in einem Falle unmöglich, wenn der Nenner Null und der Zähler nicht Null ist. Die Unmöglichkeit, die Wurzelausziehung in allen Fällen, dann auch noch andere transcendente Operationen an den bisher eingeführten Zahlen vorzunehmen, veranlasst zur Einführung neuer Zeichen, der reellen irrationalen und der imaginären Zahlen. Wie die ersteren gewählt werden, um eine Handhabe für die Operationen zu geben, sieht man im Abschnitte A. Ich habe mich in demselben auf die reellen Zahlen beschränkt, da man von ihnen ohne Mühe zu den complexen gelangen kann, indem man zu den Zeichen der reellen Zahlen a, b, etc. noch zusammengesetzte einführt. Statt der complexen Zahl $a + b\sqrt{-1}$ tritt nämlich als Zeichen (a, b_ι) ein, welches, nach geeigneter Erklärung der Addition, gleich $a + b_\iota$ wird, nach der Erklärung der Multiplication zunächst gleich $a + b.1_\iota$, und endlich, da aus derselben Erklärung folgt, dass 1_ι eine Wurzel aus -1 ist, gleich $a + b\sqrt{-1}$.

A. Ueber Zahlen.

§. 1. Die Zahlenreihen.

1. *Definition.* *Zahlenreihe* heisst eine Reihe von Zahlen a_1, a_2, etc., a_n, etc., wenn für jede noch so klein gegebene von Null verschiedene Zahl η ein Werth n existirt, der bewirkt, dass $a_n - a_{n+\nu}$ für alle ganzen positiven ν unter η liegt.

Anmerkung. Das Wort *Zahl,* ohne weiteren Zusatz, bedeutet im Abschnitte A. immer *rationale Zahl.* Die Null wird hierbei wie eine rationale Zahl angesehen.

2. *Definition.* Jede Zahlenreihe, in welcher die Zahlen a_n, mit wachsendem Index n, unter jede angebbare Grösse herabsinken, heisst *Elementarreihe.*

Folgerung. Die Glieder a jeder einzelnen Zahlenreihe bleiben unter einer endlichen Grösse. Ist die Reihe nicht eine elementare, so bleiben sie, von einem gewissen Werthe des Index n an, auch *sämmtlich* über einer von Null verschiedenen Grösse.

Bezeichnung. Der besseren Uebersicht halber sollen griechische Buchstaben für die Glieder nur bei Elementarreihen verwendet werden. Es ist also η_1, η_2, etc. eine Elementarreihe.

1. *Lehrsatz.* Ist sowohl a_1, a_2, etc. als auch b_1, b_2, etc. eine Zahlenreihe, so sind auch a_1+b_1, a_2+b_2, etc., ferner a_1-b_1, a_2-b_2, etc. und $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, etc. Zahlenreihen.

Beweis. Es ist

$$(a_n \pm b_n)-(a_{n+\nu} \pm b_{n+\nu}) = (a_n - a_{n+\nu}) \pm (b_n - b_{n+\nu}),$$

wenn die oberen Zeichen zusammen gehören und ebenso die unteren. Dieser Ausdruck wird mit wachsendem n beliebig klein, da die a und die b eine Zahlenreihe bilden, also (§. 1, Def. 1) $a_n - a_{n+\nu}$ und $b_n - b_{n+\nu}$ mit wachsendem n beliebig klein werden.

Aehnliches gilt für

$$a_n b_n - a_{n+\nu} b_{n+\nu} = a_n(b_n - b_{n+\nu}) + b_{n+\nu}(a_n - a_{n+\nu}),$$

da a_n und $b_{n+\nu}$ unter einer endlichen Grösse bleiben (§. 1, Folg.).

2. *Lehrsatz.* Unter den Voraussetzungen des ersten Lehrsatzes, und wenn noch ausserdem die a keine Elementarreihe bilden, ist auch

$$\frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{b_2}{a_2}, \quad \frac{b_3}{a_3}, \quad \ldots$$

eine Zahlenreihe.

Beweis. Es ist

$$\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+\nu}}{a_{n+\nu}} = \frac{b_n a_{n+\nu} - a_n b_{n+\nu}}{a_n a_{n+\nu}} = \frac{b_n(a_{n+\nu} - a_n) + a_n(b_n - b_{n+\nu})}{a_n a_{n+\nu}}.$$

Da der Zähler des Ausdruckes auf der rechten Seite mit wachsendem n beliebig klein wird, der Nenner aber über einer von Null verschiedenen Grösse bleibt (§. 1, Folg.), so wird auch die linke Seite mit wachsendem n beliebig klein.

3. *Definition. Zahlenreihen a_1, a_2, etc. und b_1, b_2, etc. heissen nur und immer gleich, wenn die Zahlenreihe a_1-b_1, a_2-b_2, etc. eine elementare ist.*

3. *Lehrsatz. Alle Elementarreihen sind einander gleich,* und umgekehrt ist eine Elementarreihe keiner anderen Zahlenreihe als einer elementaren gleich.

Beweis. Sind ε_n und η_n Glieder von zwei Elementarreihen, so sinkt $\varepsilon_n - \eta_n$ mit wachsendem n unter jeden Grad der Kleinheit. Es ist daher

$\varepsilon_1 - \eta_1$, $\varepsilon_2 - \eta_2$, etc. eine elementare Reihe, also (§. 1, Def. 3) wirklich die Elementarreihe ε_1, ε_2, etc. gleich der anderen η_1, η_2, etc.

Eine nicht elementare Reihe mit dem n^{ten} Gliede a_n kann aber nicht gleich der elementaren mit dem n^{ten} Gliede ε_n sein, weil $a_n - \varepsilon_n$ mit wachsendem n über einer angebbaren Grösse bleibt (§. 1, Folg.).

§. 2. Einführung der allgemeineren Zahlen oder Zahlzeichen.

Forderung. Einer jeden Zahlenreihe ein Zeichen hinzuzufügen.

Man führt als Zeichen die Reihe selbst ein, diese in eckige Parenthesen gesetzt, so dass z. B. das zur Reihe a, b, c, etc. gehörende Zeichen $[a, b, c, \text{etc.}]$ ist.

1. *Definition.* *Allgemeinere Zahl oder Zahlzeichen* heisst das zu einer Zahlenreihe gehörende Zeichen.

2. *Definition.* *Zahlzeichen heissen gleich* oder sind vertauschbar, wenn sie zu gleichen, ungleich oder nicht vertauschbar, wenn sie zu ungleichen Zahlenreihen gehören (§. 1, Def. 3.).

Bezeichnung. Sind $[a, b, \text{etc.}]$ und $[a', b', \text{etc.}]$ einander gleich, so wird dies durch $[a, b, \text{etc.}] = [a', b', \text{etc.}]$, oder durch $[a', b', \text{etc.}] = [a, b, \text{etc.}]$ bezeichnet.

Abkürzung. Als Zahlzeichen, welches zu einer Zahlenreihe gehört, deren Glieder mit den gleichen kleinen Buchstaben gebildet sind, soll auch der entsprechende grosse genommen werden können, daher als Zeichen von $[a_1, a_2, \text{etc.}]$ auch A, von $[\eta_1, \eta_2, \text{etc.}]$ auch H.

Festsetzung. Das Zahlzeichen, welches zu einer Zahlenreihe gehört, die nur gleiche Glieder a enthält, sei die rationale Zahl a selbst.

1. *Folgerung.* Es ist also (§. 2, Bezeichn.)

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots] = A,$$
$$[a, a, a, \ldots] = a.$$

1. *Lehrsatz. Das Zeichen jeder Elementarreihe ist* 0.

Beweis. Alle Elementarreihen sind gleich (§. 1, Lehrs. 3), also sind die Zeichen aller Elementarreihen gleich (§. 2, Def. 2), also gleich dem Zeichen $[0, 0, 0, \text{etc.}]$, also (§. 2, Folg. 1) gleich Null.

Erläuterung. Man rechnet nicht mit Zahlenreihen, sondern mit Zahlzeichen. Die Rechenoperationen werden unten (§. 3) durch die Zahlenreihen definirt, und zwar so definirt, dass sie die bekannten Resultate für rationale

Zahlen liefern, wenn die Glieder a_1, a_2, etc. sämmtlich gleich, also die Zahlzeichen rationale Zahlen werden; die obige *Festsetzung* ist daher gestattet.

3. *Definition.* Es heisst $A > B$, wenn $a_n - b_n$ von einem gewissen Werthe der Zahl n an immer angebbar positiv, und $A < B$, wenn $a_n - b_n$ von einem gewissen n an angebbar negativ bleibt.

Erläuterung. Das Gleichsein schliesst ein Grösser- oder Kleinersein aus. Ist nämlich $A = B$, so gehören die Glieder $a_n - b_n$ einer Elementarreihe an; ist aber nicht $A = B$ so gehören die Glieder $a_n - b_n$ nicht einer Elementarreihe an, bleiben also, absolut genommen, (§. 1, Folg. 1) über einer von Null verschiedenen Grösse, so dass dann entweder $A > B$ oder $A < B$.

2. *Folgerung.* Wenn $A > B$, so ist auch $B < A$.

2. *Lehrsatz.* Die Zeichen der beiden Reihen

$$b_1,\quad b_2,\quad b_3,\quad \ldots;$$
$$a_1,\quad a_2,\text{ etc.},\quad a_\varrho,\quad b_\mu,\quad b_{\mu+1},\quad b_{\mu+2},\text{ etc.},$$

sind einander gleich.

Beweis. Die beiden Reihen sind einander gleich, da die Reihe der Differenzen

$$a_1 - b_1,\quad a_2 - b_2,\text{ etc.},\quad a_\varrho - b_\varrho,\quad b_\mu - b_{\varrho+1},\quad b_{\mu+1} - b_{\varrho+2},\text{ etc.}$$

eine Elementarreihe ist. (§. 2, Def. 2; §. 1, Def. 3).

3. *Folgerung.* *) Ein Zahlzeichen bleibt ungeändert, wenn man von der Reihe, zu der es gehört, eine beliebige endliche Anzahl von Gliedern fortlässt.

§. 3. Rechnen mit allgemeineren Zahlen.

1. *Definition.* $A \pm B$ ist dasjenige Zeichen, welches zur Zahlenreihe (§. 1, Lehrs. 1) $a_1 \pm b_1$, $a_2 \pm b_2$, etc., und AB dasjenige, welches zur Zahlenreihe $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, etc. gehört. Ist nicht $A = 0$ (§. 1, Lehrs. 2; §. 2, Lehrs. 1), so gehört $\frac{B}{A}$ zur Zahlenreihe

$$\frac{b_1}{a_1},\quad \frac{b_2}{a_2},\quad \frac{b_3}{a_3},\quad \ldots.$$

*) Man ersieht hieraus, dass es genügt hätte, in das zur Reihe gehörende Zeichen nicht ihre ersten Glieder, sondern nur das allgemeine Gesetz aufzunehmen, so dass man als zur Reihe a_1, a_2, etc. gehörendes Zeichen auch $[a_n]$ wählen durfte. Dies führt auf die auch sonst übliche Bezeichnung, indem man nur noch die Parenthesen mit Punkten vertauscht, und z. B. nicht, was erlaubt ist (§. 4, Beispiel), $\frac{1}{9} = [0.1, 0.11, 0.111, \text{etc.}]$, sondern $= 0{,}111\ldots$ setzt. Es wird übrigens im Folgenden die bisherige Bezeichnung überall beibehalten.

1. *Folgerung.* Ist $A \pm B = C$, oder $AB = C$, oder, vorausgesetzt, dass A nicht den Werth Null besitzt, $\frac{C}{A} = B$, so hat man resp.

$$a_n \pm b_n + \eta_n = c_n; \quad a_n b_n + \eta_n = c_n; \quad \frac{c_n}{a_n} + \eta_n = b_n.$$

Umgekehrt folgen aus den letzten drei Gleichungen die ersten.

2. *Folgerung.* Es ist $A \pm 0 = A$.

3. *Folgerung.* Das Zeichen, welches zu $-a_1$, $-a_2$, etc. gehört, ist gleich $0 - A$.

Anmerkung. Man ist überein gekommen, $-A$ statt $0-A$ zu setzen; man rechnet mit $-A$ so, als ob der vollständige Ausdruck, den es vertritt, vorliegt.

2. *Definition.* *Zahlwerth* oder absoluter Werth eines Zeichens A ist das Zeichen, welches man erhält, wenn man statt der a in der Reihe ihre Zahlwerthe setzt.

Lehrsatz. Wenn $A \pm B = C$, oder $AB = C$ und dann nicht zugleich $A = 0$, so wird resp. $A = C \mp B$ oder $B = \frac{C}{A}$.

Beweis. Im ersten Falle ist (§. 3, Folg. 1) $a_n \pm b_n + \eta_n = c_n$, folglich $a_n + \eta_n = c_n \mp b_n$. Also hat man

$$[a_1 + \eta_1,\ a_2 + \eta_2, \text{etc.}] = [c_1 \mp b_1,\ c_2 \mp b_2, \text{etc.}].$$

Die linke Seite giebt (§. 3, Def. 1; §. 2, Lehrs. 1) $A + 0$ oder (§. 3, Folg. 2) A, die rechte (§. 3, Def. 1) $C \mp A$. Der Beweis im zweiten Falle wird ähnlich geführt.

§. 4. Verhalten der allgemeineren Zahlen zu den rationalen.

1. *Definition.* Giebt es für (rationale) Zahlen a_1, a_2, etc. eine (rationale) Zahl $\mathfrak{A}$ von der Beschaffenheit, dass $\mathfrak{A} - a_n$ mit wachsendem n unter jeden angebbaren Werth sinkt, so heisst $\mathfrak{A}$ die Grenze der a.

1. *Lehrsatz.* Besitzen die Glieder der Zahlenreihe a_1, a_2, etc. eine (rationale) Grenze $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}$ auch das zur Reihe a_1, a_2, etc. gehörende Zeichen.

Beweis. Nach dem Begriffe der Grenze (§. 4, Def. 1) bilden die Glieder

$$\mathfrak{A} - a_1, \quad \mathfrak{A} - a_2, \quad \mathfrak{A} - a_3, \quad \ldots$$

eine Elementarreihe, deren Zeichen Null ist (§. 2, Lehrs. 1). Dieses ist aber andererseits (§. 3, Def. 1) auch

$$= [\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \text{etc.}] - [a_1, a_2, a_3, \text{etc.}],$$

also (§. 2, Festsetz.) gleich $\mathfrak{A}-A$. Hieraus folgt in der That

$$\mathfrak{A} = [a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

Beispiel. Da die Brüche 0.1, 0.11, 0.111, etc. der (rationalen) Zahl $\frac{1}{9}$ beliebig nahe kommen, so ist (Man vgl. die Bemerkung zu §. 2, Folg. 3)

$$\tfrac{1}{9} = [0.1,\ 0.11,\ 0.111,\ \text{etc.}].$$

2. *Definition.* Von Zahlzeichen C_1, C_2, etc., C_n, etc. sagt man, dass sie mit wachsendem n unter jeden angebbaren Werth sinken, wenn für jedes, von Null verschiedene, Zahlzeichen D ein solcher Werth von n existirt, dass für dieses n und alle positiven ganzen Zahlen ν der Zahlwerth von $C_{n+\nu}$ (§. 3, Def. 2) kleiner ist (§. 2, Def. 3) als der von D.

Folgerung. Ist dies für jedes D der Fall, so tritt es auch für jede rationale Zahl d ein, indem eine rationale Zahl ein specieller Fall des Zahlzeichens ist (§. 2, Fests.). Aber auch umgekehrt: tritt es für jede rationale Zahl d ein, so ist es für jedes Zahlzeichen D der Fall. Soll es nämlich für ein bestimmtes D eintreten, dessen Zahlwerth gleich $[d_1, d_2, \text{etc.}]$ und nicht Null ist, so dass also auch d_n angebbar über Null bleibt, so giebt es eine positive rationale Zahl d, die kleiner ist als alle Zahlen d_m von einem bestimmten m an. Sinken nun die Zahlwerthe der $C_{n+\nu}$ unter d, so dass, wenn ein solcher Zahlwerth durch $[c_1, c_2, \text{etc.}]$ dargestellt wird, $d-c_m$ mit wachsendem m immer positiv bleibt, so wird, da $d_m > d$, auch $d_m - c_m$ positiv bleiben. *Es genügt also, wenn das Criterium für die rationalen Zahlen D erfüllt ist.*

3. *Definition.* Ist A ein bestimmtes Zahlzeichen, und sinkt $A-B_n$ mit wachsendem n unter jedes angebbare Zahlzeichen, *so heisst A die Grenze der B.*

2. *Lehrsatz. Das Zahlzeichen A ist die Grenze der Glieder a der Reihe, zu welcher es gehört.*

Beweis. Man hat zu zeigen (§. 4, Def. 3), dass $A-a_n$ unter jedes angebbare Zahlzeichen, also nur (§. 4, Folg.), dass es unter jede rationale Zahl d sinkt. Nun ist $A-a_n$ gleich

$$[a_1-a_n,\ a_2-a_n,\ \text{etc.},\ a_n-a_n,\ a_{n+1}-a_n,\ \text{etc.}],$$

oder (§. 2, Lehrs. 2) gleich

$$[a_{n+1}-a_n,\ a_{n+2}-a_n,\ \ldots].$$

Nimmt man n hinreichend gross, so bleiben in dem vorstehenden Ausdrucke die einzelnen Glieder der Reihe unter d, also liegt das Zahlzeichen unter $[d, d, d, \text{etc.}]$, d. h. unter d.

§. 5. Die irrationalen Zahlen beliebiger Ordnungen.

Bezeichnung. Die allgemeineren Zahlen, wenn sie auch in besonderen Fällen rationale werden, sollen irrationale Zahlen erster Ordnung heissen. Wie aus den rationalen Zahlen diese Irrationalen erster Ordnung A gebildet wurden, so lassen sich aus diesen wiederum Irrationale zweiter Ordnung A', aus diesen Irrationale dritter Ordnung A'', etc. bilden. Die Irrationalen $m+1^{\text{ter}}$ Ordnung werden durch $A^{(m)}$ bezeichnet.

Irrational, ohne Hinzufügung der Ordnung, steht dem Rationalen gegenüber. Dass irrationale Zahlen existiren, dass also nicht alle Grössen $A^{(m)}$ rationale Zahlen sein können, wird im Abschnitte B, §. 3, Folg. 2 gezeigt.

Lehrsatz. Die Irrationalitäten $m+2^{ter}$ Ordnung sind keine neuen, sondern stimmen mit denen erster Ordnung überein.

Beweis *). Es sei

$$A^{(m+1)} = [A_1^{(m)}, A_2^{(m)}, A_3^{(m)}, \ldots].$$

Ferner mögen a_1, a_2, a_3, etc. rationale Zahlen vorstellen, die resp. unter $A_1^{(m)}$, $A_2^{(m)}$, $A_3^{(m)}$, etc. liegen, und sich von diesen um weniger als resp. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc. unterscheiden. Heisst das zu a_1, a_2, a_3, etc. gehörende Zeichen, welches also eine irrationale Zahl erster Ordnung ist, A, so wird $A^{(m+1)}-A$ das Zeichen einer Elementarreihe oder Null, d. h. es ist $A^{(m+1)}$ gleich A.

B. Ueber Functionen.

§. 1. Functionen im allgemeinen.

Definition. Einwerthige Function einer Veränderlichen x heisst ein Ausdruck, der für jeden einzelnen rationalen oder irrationalen Werth von x eindeutig definirt ist.

Erläuterung. Der Werth der Function für einen irrationalen Werth der Veränderlichen darf also nicht so definirt sein, dass er von der speciellen Zahlenreihe abhängt, durch die gerade jener irrationale Werth gegeben wird, *er muss vielmehr derselbe bleiben, welches von den gleichen Zahlzeichen auch zur Feststellung des irrationalen Werthes x gewählt war.*

---

*) Es wird vorausgesetzt, dass man die Irrationalitäten höherer Ordnungen ebenso behandelt, wie im Früheren die erster Ordnung behandelt wurden. Dann ergeben sich ganz ähnliche Beziehungen, die ich hier ohne weiteres voraussetze, da ihre Entwickelung wesentlich eine Wiederholung des Früheren sein würde.

1. *Lehrsatz.* Jede ganze Potenz von x ist eine einwerthige Function.

Beweis. Es sei irgend ein bestimmter, rationaler oder irrationaler Werth von x, der X heissen möge, sowohl durch $[x_1, x_2, \text{etc.}]$ als auch durch das demselben X gleiche Zeichen $[y_1, y_2, \text{etc.}]$ gegeben, *) so dass also (A, §. 2, Def. 2) x_1-y_1, x_2-y_2, etc. eine Elementarreihe η_1, η_2, etc. bilden. Nach m maliger Multiplication von X mit sich selbst (A, §. 3, Def. 1) wird erhalten resp.

$$[x_1^m, x_2^m, \text{etc.}], \quad [y_1^m, y_2^m, \text{etc.}],$$

welche Zahlen übereinstimmen, da ihre Differenz

$$[(x_1+\eta_1)^m - x_1^m, (x_2+\eta_2)^m - x_2^m, \text{etc.}]$$

das Zahlzeichen einer Elementarreihe ist.

Folgerung. Jede sogenannte ganze Function von x ist eine Function von x.

2. *Lehrsatz.* Es sind $\sin x$ und $\cos x$ Functionen von x.

Beweis der ersten Behauptung. Als Erklärung von $\sin x$ gilt die bekannte Potenzreihe, was man so fassen muss, dass $\sin x$ das Zeichen ist, welches der Zahlenreihe

$$x, \quad x-\frac{x^3}{6}, \quad x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}, \quad \text{etc.}$$

angehört. Jedes Glied, wie weit man auch geht, ist eine ganze Function von x, hat also, unabhängig von der Entstehung von x, einen völlig bestimmten Werth. Sind die Glieder der Zahlenreihe vollständig bestimmt, so ist es auch das zu ihr gehörende Zeichen, nämlich $\sin x$.

Anmerkung. Es sollte hier kein Mittel gegeben werden, $\sin x$ für einen irrationalen Werth von x, etwa durch Annäherung, zu berechnen, indem man Näherungswerthe $\sin x_1$, $\sin x_2$, etc. bildet, wo x_1, x_2, etc. Glieder der Zahlenreihe für den irrationalen Werth vorstellen. Bisher wurde hier noch nicht einmal untersucht, ob der Sinus dieses Werthes mit $\sin x_1$, $\sin x_2$, etc. zusammenhängt. (M. vgl. B, §. 2, Erläut.). Wie eine irrationale Zahl eine völlig bestimmte Bedeutung besitzt, so kommt auch dem Sinus jeder Zahl eine solche zu, — nur dies ist bisher bewiesen. Es hat also einen Sinn, wenn man von der *Summe einer Fourierschen Reihe,* in welche man eine endliche Function entwickelt hat, *auch an den Sprungstellen* handelt. Der Einwand, dass ein

*) Nach den im §. 5 angedeuteten Erweiterungen wird man unter den Grössen x und y nicht mehr rationale Zahlen verstehen müssen; sie können auch sämmtlich oder theilweise irrational sein. Da das Folgende nur von Functionen handelt, die einwerthig sind, so wird es überflüssig sein, diese Bezeichnung jedes Mal hinzuzufügen.

Werth dort nicht existire, wenn die Abscisse, durch π getheilt, eine irrationale Zahl ist, konnte nur so lange als berechtigt gelten, als man den Irrationalitäten nicht eine selbständige Existenz beilegte. (Durch die numerische Berechnung der Summe wird man sich übrigens bei Berücksichtigung einer geringeren Anzahl n von Gliedern dem Mittelwerthe, bei einer beliebig grossen dem Werthe vor oder nach dem Sprunge nähern. Die Annäherung an den Mittelwerth kann man durch ein grösseres n nur dann vergrössern, wenn man für die kritische irrationale Abscisse einen solchen rationalen Werth gesetzt hat, der dem wahren Werthe derselben hinlänglich nahe kommt).

§. 2. Bedingungen der Continuität.

1. *Definition.* Eine Function $f(x)$ heisst *bei einem bestimmten einzelnen Werthe $x = X$ continuirlich,* wenn, für jede noch so klein gegebene Grösse ε, eine andere positive Zahl η_0 von solcher Beschaffenheit existirt, dass für keine positive Grösse η, die kleiner als η_0 ist, der Zahlwerth von $f(X \pm \eta) - f(X)$ das ε überschreitet.

1. *Folgerung.* Zwei Functionswerthe für Argumente x, welche zwischen $X - \eta$ und $X + \eta$ liegen, können sich höchstens um 2ε unterscheiden.

Erläuterung. Eine Function ist nur ein Aggregat von einzelnen Werthen (A, §. 1, Def.); ein Zusammenhang zwischen denselben, so dass ein Werth sich aus den Werthen in der Umgebung ergiebt, wird erst durch die Continuität hergestellt.

1. *Lehrsatz.* *) Ist eine Function $f(x)$ bei $x = X$ continuirlich, so bilden für jede Zahlenreihe x_1, x_2, etc., die das Zeichen X besitzt, auch $f(x_1)$, $f(x_2)$, etc. eine Zahlenreihe mit dem Zahlzeichen $f(X)$; *und umgekehrt,* wenn für jede Zahlenreihe x_1, x_2, etc., die das Zeichen X besitzt, auch $f(x_1)$, $f(x_2)$, etc. eine Zahlenreihe mit dem Zeichen $f(X)$ bilden, so ist $f(x)$ bei $x = X$ continuirlich.

*) Den Satz, dass die Function nur und immer continuirlich ist, wenn $f(X) - f(x_n)$, für jede Zahlenreihe von X beliebig klein wird, mit seinem Beweise, entlehne ich dem Herrn *Cantor.* Während ich mich hier auf Functionen mit einer Veränderlichen beschränke, hat Herr *Cantor* allgemein Functionen mehrerer Veränderlichen behandelt; er wird zeigen, dass diese Functionen die Continuität, welche ich an einer anderen Stelle (Dieses Journal, Bd. 71, S. 361) eine gleichmässige nannte, besitzen, wenn sie *in jedem einzelnen Punkte* gewisse Bedingungen erfüllen. Den allgemeinen Gang des Beweises einiger Sätze im §. 3 nach den Principien des Herrn *Weierstrass* kenne ich durch mündliche Mittheilungen von ihm selbst, von Herrn *Schwarz* und *Cantor,* so dass bei diesen Beweisen nur die Durchführung im Einzelnen von mir herrührt.

Beweis. Erstens. Jede Zahlenreihe x_1, x_2, etc. lässt sich mit Hülfe einer Elementarreihe als $X+\eta_1$, $X+\eta_2$, etc. darstellen. Ist nun die Function continuirlich, so werden für jede gegebene Grösse ε (B, §. 2, Def. 1) die Glieder der Reihe η_1, η_2, etc. unter η_0 herabsinken, so dass, von einem gewissen Werthe von n an, $f(X+\eta_n)-f(X)$, d. h. $f(x_n)-f(X)$ nicht mehr ε überschreitet. Diese Differenz ist, da man ε beliebig klein nehmen kann, das allgemeine Glied einer Elementarreihe, $f(x_1)-f(X)$, $f(x_2)-f(X)$, etc., deren Zahlzeichen daher Null wird. Andererseits ist es auch (A, §. 3, Def. 1) gleich

$$[f(x_1),\ f(x_2),\ \text{etc.}]-f(X),$$

wodurch der erste Theil bewiesen ist, nämlich die Gleichheit

$$f(X) = [f(x_1),\ f(x_2),\ \text{etc.}].$$

Zweitens. Erfüllt nun die Function die vorstehende Bedingung, welche besagt, dass für jede Zahlenreihe x_1, x_2, etc. ohne irgend eine Ausnahme, deren Zahlzeichen X ist, $f(x_1)-f(X)$, $f(x_2)-f(X)$, etc. beliebig klein werden, so folgt daraus ihre Continuität. Würde nämlich, wenn man eine bestimmte Zahl ε festhält (B, §. 2, Def. 1), wie klein man auch eine Zahl η_0 nimmt, niemals die Bedingung der Continuität erfüllt sein, würden also noch immer Werthe η unter η_0 existiren, für welche $f(X+\eta)-f(X)$ über ε bleibt, so sei für irgend eine Grösse von η_0 ein solcher Werth von η (unter diesem η_0), für welchen obige Differenz nicht kleiner als ε ist, gleich η'. Für einen halb so grossen Werth von η_0 möge die Differenz bei $\eta=\eta''$ nicht kleiner als ε sein; für ein η_0 gleich der Hälfte des früheren (dem Viertel des ersten) möge dies bei $\eta=\eta'''$ geschehen, u. s. f. Da die Werthe von η_0 eine Elementarreihe bilden, so ist dasselbe mit (den kleineren) η', η'', η''', etc. der Fall; es würden also $X+\eta'$, $X+\eta''$, etc. eine Zahlenreihe x_1, x_2, etc. mit dem Zeichen X vorstellen, ohne dass doch $f(x_1)-f(X)$, $f(x_2)-f(X)$, etc. unter ε sinken — gegen die Voraussetzung.

2. *Lehrsatz.* Eine continuirliche Function $f(x)$ ist für jedes x bekannt, wenn sie für jeden rationalen Werth dieser Veränderlichen gegeben ist.

Beweis. Es sei X eine irrationale, durch die Reihe x_1, x_2, x_3, etc. gegebene Grösse; ferner mögen y_1, y_2, y_3, etc. rationale Zahlen vorstellen, die sich von x_1, x_2, x_3, etc. um weniger als 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc. unterscheiden. Da die x von den gleichnamigen y nur um Glieder einer Elementarreihe verschieden sind, so ist auch (A, §. 2, Def. 2) X gleich $[y_1, y_2, \text{etc.}]$, also (B, §. 2, Lehrs. 1)

$$f(X) = [f(y_1), f(y_2), \text{etc.}],$$

folglich bekannt.

3. *Lehrsatz*. Jede ganze Potenz x^m ist bei jedem einzelnen Werthe $x = X$ continuirlich.

Beweis. Es sei wiederum $X = [x_1, x_2, \text{etc.}]$, woraus folgt (A, §. 3, Def. 1) dass

$$X^m = [x_1^m, x_2^m, \ldots]$$

sei. Dies ist aber (B, §. 2, Lehrs. 1) die Bedingung der Continuität für eine Function $f(x) = x^m$ bei X.

2. *Folgerung*. Jede ganze Function ist bei jedem einzelnen Werthe der Veränderlichen continuirlich.

4. *Lehrsatz*. Es ist $\sin x$ bei jedem einzelnen Werthe $x = X$ continuirlich.

Beweis. Man hat nachzuweisen, dass $\sin x_1$, $\sin x_2$, etc. eine Zahlenreihe bilden, und zweitens, dass das Zeichen derselben $\sin X$ ist. Beides folgt, wenn man gezeigt hat, dass die Reihe $\sin X - \sin x_1$, $\sin X - \sin x_2$, etc. eine elementare ist. In der That wird aber $\sin X - \sin x_n$ oder

$$\left[X - x_n,\ X - x_n - \frac{X^3 - x_n^3}{6},\ \text{etc.}\right]$$

mit wachsendem n beliebig klein.

§. 3. Eigenschaften continuirlicher Functionen.

1. *Definition*. Eine Function $f(x)$ heisst *continuirlich* von $x = a$ bis $x = b$, wenn sie bei jedem einzelnen Werthe $x = X$ zwischen $x = a$ und $x = b$, mit Einschluss der Werthe a und b, continuirlich ist (B, §. 2, Def. 1); sie heisst *gleichmässig continuirlich* von $x = a$ bis $x = b$, wenn für jede noch so kleine gegebene Grösse ε eine solche positive Grösse η_0 existirt, dass für alle positiven Werthe η, die kleiner als η_0 sind, $f(x \pm \eta) - f(x)$ unter ε bleibt. Welchen Werth man auch x geben möge, nur vorausgesetzt, dass x und $x \pm \eta$ dem Gebiete von a bis b angehören, muss *dasselbe* η_0 das Geforderte leisten.

1. *Lehrsatz*. Jede ganze Potenz von x ist zwischen irgend welchen gegebenen Grenzen gleichmässig continuirlich.

Beweis. Da $(x \pm \eta)^m - x^m$, jedenfalls unter dem Producte aus η und einer in den gegebenen Grenzen festen Grösse bleibt, so lässt sich diese Differenz offenbar für alle x durch denselben Werth von η beliebig klein machen.

1. *Folgerung.* Jede ganze Function ist zwischen beliebig gegebenen Grenzen gleichmässig continuirlich.

2. *Lehrsatz.* Besitzt eine (für jedes einzelne x) von a bis b continuirliche Function $f(x)$ für zwei zwischen a und b liegende Zahlen $x=x_1$ und $x=x_2$ entgegengesetzte Vorzeichen, so verschwindet sie für einen dazwischen liegenden Werth von x.

Beweis. *) Es mögen $x_2-x_1=\delta$ und $f(x_1)$ positiv sein. Man bilde nun die Zahlen

$$x_3=x_2-\frac{\delta}{2},\quad x_4=x_3\pm\frac{\delta}{4},\quad x_5=x_4\pm\frac{\delta}{8},$$

allgemein

$$x_{n+1} = x_n\pm\frac{\delta}{2^{n-1}},$$

und zwar gilt, bei der Bildung von x_{n+1} aus x_n das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem $f(x_n)$ das positive oder negative Vorzeichen besitzt; — ist der Functionswerth $f(x_n)$ für irgend ein n Null, so bedarf der Satz keines weiteren Beweises, weshalb dieser Fall ausgeschlossen bleibt.

Die Zahlen x_1, x_2, etc. bilden eine Zahlenreihe, da (A, §. 1, Def. 1) $x_{n+\nu}-x_n$, wie aus den vorstehenden Gleichungen durch eine ganz elementare Rechnung hervorgeht, selbst im ungünstigsten Falle, wenn nämlich die Functionswerthe für x_{n-1}, x_n, etc., $x_{n+\nu-1}$ sämmtlich dasselbe Vorzeichen besitzen, mit wachsendem n beliebig klein wird. Das Zahlzeichen dieser Zahlenreihe sei X; ich zeige, dass $f(X)$ Null ist.

Wäre dies nicht Null, so ist es eine bestimmte Zahl, die 4ε heisse. Man bilde nun eine solche Grösse η_0, dass $f(X\pm\eta)-f(X)<\varepsilon$ (B, §. 2, Def. 1), und nehme n so gross, dass x_n, x_{n+1}, etc. sich von X um weniger als η_0 unterscheiden, wodurch $f(X)$ sich von $f(x_n)$, $f(x_{n+1})$, etc. um weniger als ε unterscheidet. Dann ist die Differenz $f(x_n)-f(x_{n+\nu})$ kleiner als 2ε. Nimmt man nun ν so gross, dass $f(x_n)$ und $f(x_{n+\nu})$ entgegengesetzte Vorzeichen haben (dass dies immer erreicht werden kann, wird unten gezeigt), so leuchtet ein, dass $f(x_n)$ selbst kleiner als 2ε, mithin $f(X)$ kleiner als 3ε, also nicht gleich 4ε ist.

Würde aber, wie gross man auch für ein bestimmtes n die Zahl ν nimmt, $f(x_{n+\nu})$ immer dasselbe Vorzeichen wie x_n behalten, so sei x_m diejenige Zahl der Reihe mit dem niedrigsten Index, von welcher an die Vorzeichen

*) Es schien zweckmässig, selbst auf Kosten der Kürze, beim Beweise geometrische Anschauungen auszuschliessen.

der Function $f(x)$ nicht mehr wechseln, so dass sie also für x_m, x_{m+1}, etc. dieselben bleiben. Da $f(x_1)$ und $f(x_2)$ entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, so ist m wenigstens gleich 2; folglich haben sicher $f(x_{m-1})$ und $f(x_m)$ entgegengesetzte Vorzeichen. Bezeichnet α die positive oder negative Einheit, je nachdem $f(x_{m-1})$ positiv oder negativ ist, so wird, nach diesen Voraussetzungen,

$$x_m = x_{m-1} + \alpha\delta 2^{2-m}, \quad x_{m+1} = x_m - \alpha\delta 2^{1-m}, \quad x_{m+2} = x_{m+1} - \alpha\delta 2^{-m}, \text{ etc.},$$

folglich

$$x_{m+\mu} - x_{m-1} = -\alpha\delta 2^{2-m}\left(-1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^\mu}\right).$$

Mit wachsendem μ sinkt die rechte Seite, welche das Zeichen von α besitzt, unter jeden Grad der Kleinheit, so dass das Zahlzeichen X der oben gebildeten Zahlenreihe genau x_{m-1} wäre. Es würde das allgemeine Glied x_n dieser Zahlenreihe sich also x_{m-1} beliebig nähern, und dabei hätte die ganz bestimmte Grösse $f(x_{m-1})$ das Zeichen von α, $f(x_n)$ das entgegengesetzte. Dies ist, wegen der Continuität von $f(x)$, nicht möglich.

2. *Folgerung.* Sobald a eine positive ganze nicht quadratische Zahl bezeichnet, besitzt die Gleichung $x^2 - a = 0$ keine ganze, folglich keine rationale Wurzel. Es hat aber die linke Seite für gewisse verschiedene Werthe von x entgegengesetzte Vorzeichen, also die Gleichung eine irrationale Wurzel. Hierdurch ist bewiesen, dass nicht alle Zahlzeichen sich auf rationale Zahlen reduciren, sondern *dass es auch irrationale Zahlen giebt.* (A, §. 5).

3. *Lehrsatz.* Eine Function $f(x)$, die von $x = a$ bis $x = b$ so beschaffen ist, dass zwischen je zwei Zahlen x_1 und x_2, wie nahe sie auch gewählt werden, noch andere liegen, für welche $f(x)$ verschiedene Zeichen besitzt, ist discontinuirlich.

Beweis. Wäre sie continuirlich, so sei sie für einen bestimmten Werth ξ von x gleich 2ε. Es lässt sich dann eine Grösse η_0 so bestimmen, dass

$$f(\xi \pm \eta) - f(\xi) < \varepsilon,$$

für jeden Werth η unter η_0. Zwischen $x = \xi$ und $x = \xi + \eta_0$ ändert $f(x)$ das Zeichen, muss demnach dazwischen, für einen Werth $x = \xi + \eta_1$ verschwinden (B, §. 3, Lehrs. 2), so dass $f(\xi)$ sich von Null höchstens um ε unterscheidet, also nicht 2ε sein kann.

4. *Lehrsatz.* Wenn die (für jedes einzelne x) von $x = a$ bis $x = b$ continuirliche Function $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ nie negativ, aber zwischen diesen Grenzen kleiner wird als jede angebbare Grösse, so *erreicht* sie auch den Werth Null.

Beweis. Da $f(x)$ für jedes bestimmte x auch einen bestimmten Werth besitzt, so kann es für ein solches x nur dann kleiner als jede angebbare

Grösse sein, wenn es dort verschwindet. Es seien nun x_1 und x_2 zwei derartige Zahlen, dass zwischen ihnen andere liegen, für welche $f(x)$ beliebig klein wird; behält man die Bezeichnung im Beweise des zweiten Lehrsatzes bei, bildet also Zahlen x_3, x_4, etc. durch die dort angeführten Recursionsformeln, in denen über die Wahl des unbestimmt gelassenen Vorzeichens noch das Nähere angegeben werden soll, so könnten zunächst $x=x_3$, oder $x=x_4$, etc., $x=x_n$, solche Stellen sein, an denen $f(x)$ beliebig klein wird. Dann verschwindet es aber an diesen Stellen, wie aus dem Eingange dieses Beweises ersichtlich ist, und der Satz wäre bewiesen. Es handelt sich also nur noch um den Beweis, wenn die Function weder für x_3, noch für x_4, etc. verschwindet, wie viele von diesen Zahlen man auch bilden möge.

Die Zahlen x, für welche $f(x)$ beliebig klein wird, sind entweder grösser als x_3, oder kleiner als x_3, oder zum Theil grösser, zum Theil kleiner. Im ersten Falle bilde man x_4 aus x_3 mit Hülfe des positiven Vorzeichens, im zweiten mit dem negativen, im dritten, wie willkürlich festgesetzt wird, mit dem positiven. In ähnlicher Art wird x_5 aus x_4 gebildet, u. s. f., so dass eine Zahlenreihe x_1, x_2, etc. mit dem Zahlzeichen X entsteht; ich zeige, dass $f(X)$ Null ist.

Wäre es nicht Null sondern 3ε, so bilde man, wie im zweiten Lehrsatze, η_0 und nehme n so gross wie dort, d. h. so gross, dass x_n, x_{n+1}, etc. sich von X um weniger als η_0 unterscheiden. Sind nun x_n und x_{n+1} Werthe, zwischen denen Zahlen x liegen, für welche $f(x)$ beliebig klein, z. B. $<\varepsilon$, wird, so kann $f(X)$, welches sich von allen Zahlen $f(x)$, wo $X-\eta_0<x<X+\eta_0$, um weniger als ε unterscheidet, höchstens 2ε und nicht 3ε sein. Würde es aber kein ν geben, würde man also von x_ν an immer zu grösseren oder immer zu kleineren Werthen $x_{\nu+1}$, $x_{\nu+2}$, etc. gelangen, so sei x_ν das letzte von den zu bildenden x, welches resp. einen kleineren oder grösseren Werth besitzt, als das vorhergehende; $x_{\nu+1}$, $x_{\nu+2}$, etc. sind dann sämmtlich resp. grösser oder kleiner als x_ν und bilden eine wachsende oder abnehmende Reihe von Gliedern, welche aber immer unter oder über $x_{\nu-1}$ bleiben. Man findet durch dieselbe Rechnung wie bei dem zweiten Lehrsatze in dem entsprechenden Falle, $X=x_{\nu-1}$. Während $f(X)=f(x_{\nu-1})$ einen bestimmten Werth 3ε besitzt, würde daher $f(x)$ beliebig klein sein müssen für Werthe x, die beliebig nahe an $x_{\nu-1}$ liegen, nämlich zwischen $X=x_{\nu-1}$ und x_ν, wie gross man auch ν nimmt. Dieses ist aber, wegen der Continuität von $f(x)$, nicht möglich.

3. *Folgerung.* Wenn eine (für alle einzelnen Werthe) von $x = a$ bis $x = b$ continuirliche Function nicht überall gleiche Werthe besitzt, so erreicht sie für einen bestimmten Werth von x ein Maximum und ebenso ein Minimum.

5. *Lehrsatz.* Wenn die von $x = a$ bis $x = b$ (für alle einzelnen Werthe) continuirliche Function $f(x)$ für jeden einzelnen Werth, der zwischen a und einer rationalen oder irrationalen Zahl X liegt, wo $a < X < b$, wie nahe man auch X kommt, nicht positiv, über X hinaus aber positiv wird, so ist $f(X) = 0$.

Beweis. Es sei x_1, x_2, etc. eine Zahlenreihe für X, deren Glieder sämmtlich unter X liegen sollen. Dann wird

$$f(X) = [f(x_1),\ f(x_2),\ \text{etc.}]$$

nicht positiv; negativ kann es wegen der Continuität von $f(x)$ unmöglich sein, weil es dann einen bestimmt angebbaren, von Null verschiedenen negativen Werth besässe, während $f(x)$ selbst für den kleinsten Werth, der x grösser als X macht, nach der Voraussetzung, positiv ist. Es bleibt daher nur übrig, dass $f(X)$ Null ist.

6. *Lehrsatz.* Eine von $x = a$ bis $x = b$ (für alle einzelnen Werthe) continuirliche Function $f(x)$ ist auch gleichmässig continuirlich. (B, §. 3, Def. 1).

Beweis. Bezeichnet 3ε eine beliebige Grösse, so existirt eine solche Zahl, dass von $x = a$ bis zu ihr hin $f(x) - f(a)$ absolut $\leqq 3\varepsilon$ ist. Ein Werth, der dies leistet, ist der grösste und macht zugleich $f(x) - f(a) - 3\varepsilon = 0$. (B, §. 3, Lehrs. 5). Dieser Werth sei x_1. In ähnlicher Art findet man eine Zahl x_2 als die grösste, welche bewirkt, dass von $x = x_1$ bis $x = x_2$ immer $f(x) - f(x_1) \leqq 3\varepsilon$ bleibt. So fährt man fort; kommt man nach einer endlichen Anzahl n von Operationen zu $x_n = b$ oder findet, dass $f(x) - f(x_{n-1})$, von $x = x_{n-1}$ bis $x = b$, noch nicht 3ε überschreitet, so ist der Satz bewiesen.

Es bliebe noch der Fall übrig, dass kein n existirt, dass also die Grössen x_1, x_2, etc. eine unendliche Reihe von wachsenden Grössen bilden, die unter b liegen. Diese Reihe wäre dann eine Zahlenreihe, deren Zahlzeichen X sei; hervorzuheben ist ihre Eigenschaft, nach der für jedes n die Gleichung besteht: $f(x_{n+1}) - f(x_n) = 3\varepsilon$. Nun sei η_0 von der Beschaffenheit, dass $f(X)$ sich von $f(X-\eta)$ um weniger als ε unterscheidet, so lange $\eta < \eta_0$. Zwischen die Zahlen $X - \eta_0$ und X mögen von der obigen Zahlenreihe x_n, x_{n+1}, etc. fallen, so dass (B, §. 2, Folg. 1) $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ kleiner als 2ε wäre, während es andererseits 3ε sein müsste. Die zu Grunde liegende Annahme ist daher unmöglich, und die Function eine gleichmässig continuirliche.

Halle, im October 1871.

Bestimmung der Anzahl involutorischer Elementenpaare einförmiger mehrdeutiger Gebilde.

(Von Herrn *Emil Weyr* in Prag.)

Bei vielen geometrischen Fragen, bei deren Lösung Verwandtschaften einförmiger Elementargebilde zur Anwendung gelangen, stellt sich die folgende Frage zur Beantwortung auf.

„*Wenn sich zwei $m-n$-deutige einförmige und gleichartige Elementargebilde auf einem und demselben Träger befinden, wie viel involutorischer Elementenpaare enthalten sie; d. h. wie viele Mal kommt es vor, dass sich die beiden Elemente eines Paares vertauschungsfähig entsprechen.*"

Seien G_m, G_n die beiden $m-n$-deutigen Gebilde, welche sich auf dem gemeinschaftlichen Träger T befinden. Jedem Elemente von G_m entsprechen (algebraisch) n Elemente von G_n, und umgekehrt entsprechen jedem Elemente des letzteren Gebildes m Elemente des ersteren. Zwei Elemente i, i' bilden ein involutorisches Elementenpaar beider Gebilde, wenn jedem das andere entspricht, ob man nun jenes zu dem m-deutigen oder dem n-deutigen Gebilde rechnet. Diese Eigenschaft theilen offenbar auch die sich selbst entsprechenden Elemente beider Gebilde, d. h. die in der Zahl $(m+n)$ vorhandenen *Doppelelemente* beider Gebilde. Ausser diesen Doppelelementen giebt es jedoch noch eine bestimmte Anzahl von *eigentlichen* involutorischen Elementenpaaren, welche Anzahl zu bestimmen, der Zweck dieser kurzen Mittheilung ist.

Zwischen den Parametern x_m, x_n zweier entsprechenden Elemente der beiden Gebilde wird eine Gleichung:

$$(1.)\qquad F(x_m,\ x_n) = 0$$

bestehen, welche in x_m vom m^{ten} und in x_n vom n^{ten} Grade ist, und deren Grad somit $(m+n)$ sein wird. Sind nun x_m, x_n die Parameter der Elemente eines involutorischen Paares, und ist die Bedeutung beider Parameter die nämliche, so wird auch die Gleichung:

$$(2.)\qquad F(x_n,\ x_m) = 0$$

erfüllt sein müssen, welche man aus (1.) durch Vertauschung von x_m und x_n erhält.

Die den beiden Gleichungen (1.), (2.), von denen jede vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade ist, gemeinsamen Wurzelpaare sind somit die Parameter der Elemente involutorischer Elementenpaare. Solcher, den beiden Gleichungen gemeinschaftlicher Wurzelpaare giebt es $(m+n)^2-2mn$, d. h. (m^2+n_2), wie man sich leicht in folgender Weise überzeugen kann.

Fasst man (1.) und (2.) als Gleichungen zweier Curven in der Ebene auf, bezogen auf ein und dasselbe System paralleler Coordinaten, so stellt jede der Gleichungen eine Curve $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung dar. Die Curve (1.) hat jedoch auf der Axe (x_m) einen unendlich weiten n-fachen, und auf der Axe (x_n) einen unendlich weiten m-fachen Punkt. Dagegen hat (2.) auf (x_m) einen unendlich weiten m-fachen und auf (x_n) einen unendlich weiten n-fachen Punkt. Die beiden unendlich weiten Punkte der Coordinatenaxen gelten somit für $2m.n$ gemeinschaftlicher Schnittpunkte beider Curven, so dass dieselben im Endlichen noch weitere $(m+n)^2-2mn$, d. i. (m^2+n^2) Schnittpunkte besitzen müssen. Die Coordinatenwerthe dieser Punkte sind die den Gleichungen (1.) und (2.) gemeinschaftlichen Wurzelpaare.

Unter diesen Wurzelpaaren sind jedoch auch die Parameter der $(m+n)$ sich selbst entsprechenden Elemente enthalten, denn es ist klar, dass wenn unter der Bedingung $x_m = x_n$ der Gleichung (1.) genügt wird, gleichzeitig auch die Gleichung (2.) befriedigt sein muss. Es bleiben uns somit für die eigentlichen involutorischen Elementenpaare bloss $(m^2+n^2)-(m+n)$, d. h. $[m(m-1)+n(n-1)]$ gemeinschaftlicher Wurzelpaare der Gleichungen (1.), (2.). Nun ist jedoch weiter klar, dass jedes involutorische Elementenpaar zu zwei gemeinschaftlichen Wurzelpaaren beider Gleichungen Veranlassung giebt, von denen das eine aus dem anderen durch die Vertauschung seiner Wurzeln hervorgeht. Denn ist z. B. x_m, x_n ein gemeinschaftliches Paar von Wurzeln, so ist auch x_n, x_m ein solches. Wir finden daher das folgende Ergebniss als Antwort für die aufgestellte Frage:

„Befinden sich zwei gleichartige einförmige und m-n-deutige Elementargebilde auf demselben Träger, so besitzen sie:

$$\tfrac{1}{2}[m(m-1)+n(n-1)]$$

involutorische Elementenpaare.“

Wir fügen noch den folgenden geometrischen Beweis des ausgesprochenen Theorems bei.

Die $m-n$-deutigen Gebilde G_m, G_n mögen zwei $m-n$-deutige Punktsysteme auf einem Kegelschnitte C_2 sein. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte werden eine Curve $C^{2mn}_{(m+n)}$ der $(m+n)^{\text{ten}}$ Classe und der $2mn^{\text{ten}}$ Ordnung umhüllen, welche man wohl auch die *Directionscurve* der beiden Systeme nennen könnte. Dass diese Curve von der $(m+n)^{\text{ten}}$ Classe sein müsse, folgt schon aus dem Umstande, dass durch jeden Punkt von C_2 $(m+n)$ ihrer Tangenten gehen, nämlich erstens die m Geraden, welche den betreffenden Punkt mit den entsprechenden Punkten des m-deutigen, und dann die n Geraden, welche ihn mit den entsprechenden Punkten des n-deutigen Systems verbinden. Uebrigens ist es nicht schwer, einen directen Beweis dafür zu liefern, dass durch einen beliebigen Punkt der Ebene $(m+n)$ Tangenten von $C^{2mn}_{(m+n)}$ hindurchgehen. Es kommt einfach darauf an zu zeigen, dass eine quadratische Involution, welche sich mit zwei $m-n$-deutigen Gebilden auf demselben Träger befindet, mit ihnen $(m+n)$ Elementenpaare gemeinschaftlich hat.

Die Ordnung der Directionscurve finden wir, wenn wir die Zahl der Punkte bestimmen, welche sie mit dem Träger C_2 gemeinschaftlich hat. Zunächst sind die $(m+n)$ sich selbst entsprechenden Punkte ebensoviele Berührungspunkte der Directionscurve mit dem Träger C_2 und zwar aus demselben Grunde, aus welchem die beiden Doppelpunkte zweier projectivischen Punktsysteme auf C_2 die Berührungspunkte dieses Kegelschnittes mit jenem Kegelschnitte sind, welcher von den Verbindungslinien entsprechender Punkte eingehüllt wird. Die $(m+n)$ Doppelpunkte der beiden Systeme gelten somit für $2(m+n)$ Schnittpunkte der Curven C_2, $C^{2mn}_{(m+n)}$. Nun giebt es aber im m-deutigen Gebilde bekanntlich $2m(n-1)$ Verzweigungspunkte, d. h. solche Punkte, denen im n-deutigen Gebilde zwei unendlich nahe Punkte entsprechen. Durch jeden solchen Verzweigungspunkt gehen somit zwei unendlich nahe Tangenten der Directionscurve, so dass ein solcher Punkt als der Curve $C^{2mn}_{(m+n)}$ angehörig betrachtet werden muss. Die Verzweigungspunkte sind also Schnittpunkte der Directionscurve mit dem Träger C_2; ebenso sind die $2n(m-1)$ Verzweigungspunkte des n-deutigen Systemes ebensoviele Schnittpunkte der Curven C_2, $C^{2mn}_{(m+n)}$, so dass wir im Ganzen

$$2(m+n)+2m(n-1)+2n(m-1) = 4mn$$

gemeinschaftlicher Schnittpunkte erhalten, woraus hervorgeht, dass $C^{2mn}_{(m+n)}$ in der That eine Curve der $2mn^{\text{ten}}$ Ordnung sein müsse, da ausser den aufgezählten keine anderen Schnittpunkte vorkommen können.

Die Reduction der Ordnungszahl der Umhüllungscurve $C^{2mn}_{(m+n)}$ kann

nur von Doppeltangenten herrühren, für deren Anzahl x wir leicht, gemäss den Formeln von *Plücker* die Gleichung erhalten:

$$(m+n)(m+n-1)-2x = 2mn,$$

woraus folgt:

$$x = \tfrac{1}{2}[m(m-1)+n(n-1)].$$

Da nun jede Doppeltangente der Directionscurve ein involutorisches Elementenpaar der beiden Gebilde liefert, so haben wir durch obige Bestimmung der Anzahl der Doppeltangenten von neuem die Richtigkeit des von uns ausgesprochenen Theoremes erhärtet.

Prag, im October 1871.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. W. Thomé.*)

1.

Es sei

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+p_m y=0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten p in der Umgebung eines Punktes $x=a$ einwerthige analytische Functionen sind. In einem um den Punkt $x=x_0$ geschlagenen Kreise, worin diese Coefficienten allenthalben einwerthig und stetig bleiben, genügt nach dem von Hrn. *Weierstrass* gegebenen Grundsatze dieser Theorie (vgl. die Abhandlung des Herrn *Fuchs:* Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten Bd. 66 d. J., S. 122) der vorliegenden Differentialgleichung eine und nur eine innerhalb des *ganzen* Kreises einwerthige und stetige analytische Function, die mit ihren $m-1$ ersten Ableitungen im Punkte x_0 vorgeschriebene Werthe annimmt. Nimmt man nun ein Gebiet, worin die Coefficienten p einwerthig sind, so wird das vollständige Integral der Differentialgleichung in demselben dargestellt durch den Ausdruck $c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_my_m$, wo die Grössen c Constanten, y_1 bis y_m linearunabhängige particuläre Integrale sind, so dass eine Relation $k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_my_m=0$ mit constanten Coefficienten zwischen denselben nicht besteht. Die Form eines solchen Fundamentalsystems linearunabhängiger particulärer Integrale in der Umgebung des Punktes $x=a$, wenn in demselben nicht alle Coefficienten p stetig bleiben, hat Herr *Fuchs* gegeben (Bd. 66 d. J. S. 131). Derselbe stellt hierzu eine Fundamentalgleichung m^{ten} Grades auf, deren Coefficienten von der Wahl irgend eines Fundamentalsystems von Integralen unabhängig und deren Wurzeln ω_1 bis ω_m alle von Null verschieden sind. Kommt eine Wurzel ω_α dieser Gleichung einfach vor, so entspricht derselben ein Integral des Fundamentalsystems der Form

$$(2.)\quad y_\alpha=(x-a)^{k_\alpha}\varphi_\alpha,$$

wo $k_\alpha=\frac{1}{2\pi i}\log\omega_\alpha$ und φ_α eine in der Umgebung von $x=a$ einwerthige

Function ist. Kommt eine Wurzel $\omega_\mathfrak{a}$ λfach vor, so entspricht dieser Gruppe einander gleicher Wurzeln die Gruppe der Integrale im Fundamentalsysteme

$$(3.)\quad y_\mathfrak{a}=(x-a)^{k_\mathfrak{a}}\sum_{1}^{\mathfrak{a}}{}_\mathfrak{b}\,\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}[\log(x-a)]^{\mathfrak{b}-1}\quad(\mathfrak{a}=1,\ 2,\dots\lambda),$$

wo $k_\mathfrak{a}$ nur um ganze Zahlen sich unterscheidende Werthe von $\frac{1}{2\pi i}\log\omega_\mathfrak{a}$, $\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ in der Umgebung von $x=a$ einwerthige Functionen sind. Diese Form der Integrale, die einer λfachen Wurzel $\omega_\mathfrak{a}$ der Fundamentalgleichung entsprechen, kann man unmittelbar dadurch erhalten, dass man mit Hülfe irgend eines Fundamentalsystems zunächst ein Integral der Form $y_1=(x-a)^{k_\mathfrak{a}}\varphi_1$ bildet, wo φ_1 in der Umgebung von $x=a$ einwerthig ist, dieses in das Fundamentalsystem einführt, alsdann in der Differentialgleichung $y=y_1\int z dx$ setzt, die Differentialgleichung für z aufstellt und unter Berücksichtigung, dass die Coefficienten der Fundamentalgleichung unabhängig von der Wahl irgend eines Fundamentalsystems sind, die Fundamentalgleichung für die neue Differentialgleichung des z bildet, die alsdann $\lambda-1$ Wurzeln gleich 1 hat. Auf diese Weise wird eine Gruppe von Integralen hergeleitet von der Form

$$(4.)\quad \begin{cases} y_1=(x-a)^{k_\mathfrak{a}}\varphi_1,\ y_2=y_1\int z dx,\ y_3=y_1\int dx\, z\int u dx, \\ \dots y_\lambda=y_1\int dx\, z\int dx\, u\dots\int w dx, \end{cases}$$

wo die Functionen z, u, $\dots w$ alle in der Umgebung von $x=a$ einwerthig sind. Dass die so erhaltene Gruppe linearunabhängiger Integrale auch von den übrigen auf gleiche Weise gebildeten linearunabhängig ist, wird weiter unten in dieser Nummer nachgewiesen. Die Functionen φ in dem angegebenen Fundamentalsysteme (2.) und (3.), die also in der Umgebung von $x=a$ einwerthig sind, lassen sich in dem um den Punkt $x=a$ geschlagenen Kreise, worin sie abgesehen von dem Punkte a endlich bleiben, durch die Summe zweier Potenzreihen darstellen, wovon die eine nach Potenzen von $x-a$ mit positiven, die andere mit negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitet. Herr *Fuchs* untersucht nun im weiteren Verlaufe seiner Abhandlungen (Bd. 66 d. J., S. 139 und 68, S. 359) diejenige Differentialgleichung, deren *sämmtliche* Integrale mit bestimmten Potenzen von $x-a$ multiplicirt für $x=a$ endlich werden, wozu sich für die Functionen φ des Fundamentalsystems mittels der linearen Beziehungen zwischen denselben ergiebt, dass sie in ihren Entwickelungen Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher

Anzahl enthalten dürfen. Die Bestimmung der Coefficienten p_1 bis p_m dieser Differentialgleichung geschieht dabei dadurch, dass das System von m linearen Gleichungen mit m Unbekannten aufgelöst wird, welches aus der Differentialgleichung (1.) durch Einsetzen der m linearunabhängigen particulären Integrale der angegebenen Form entspringt.

Man kann darauf ausgehen, Untersuchungen über solche Differentialgleichungen anzustellen, die überhaupt unter ihren Integralen auch derartige besitzen, dass in ihren aus den particulären Integralen (2.) *und* (3.) *linear mit constanten Coefficienten zusammengesetzten Ausdrücken die Entwickelungen der einwerthigen Functionen, die nach Potenzen von $x-a$ fortschreiten, Potenzen mit negativen Exponenten nur in endlicher Anzahl enthalten.* Dies soll im Folgenden geschehen nach einer anderen Methode, als Herr *Fuchs* angewandt hat, die zugleich einen einfachen Beweis für die Differentialgleichung des Herrn *Fuchs* liefert.

Was die Definition jener Integrale angeht, so hat man zu bemerken, dass eine analytische Function des Ausdruckes:

$$(5.)\quad \begin{cases} c_1(x-a)^{r_1}\varphi_{r_1 0}+c_2(x-a)^{r_2}\{\varphi_{r_2 0}+\varphi_{r_2 1}\log(x-a)+\cdots+\varphi_{r_2 k}(\log(x-a))^k\} \\ +\cdots+c_s(x-a)^{r_s}\{\varphi_{r_s 0}+\cdots+\varphi_{r_s k}[\log(x-a)]^k\}, \end{cases}$$

worin die Grössen c Constanten in endlicher Anzahl sind, je zwei der Exponenten $r_1, \ldots r_s$ sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, die Potenzen von $\log(x-a)$ mit positiven ganzzahligen Exponenten nur in endlicher Anzahl vorkommen und die Grössen φ in der Umgebung von $x=a$ einwerthig sind, demnach durch die Summe zweier Potenzreihen entwickelt werden, wovon die eine nach Potenzen von $x-a$ mit positiven, die andere mit negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitet, sich nur auf *eine* Weise unter dieser Form darstellen lässt. Wenn also dieser Ausdruck einem zweiten dieser Form gleich sein soll, so müssen auf beiden Seiten die nämlichen Functionen $(x-a)^p[\log(x-a)]^q$ mit den nämlichen Coefficienten vorkommen. Dieses ist bewiesen, wenn man zeigt, dass ein solcher Ausdruck nicht identisch Null sein kann, ohne dass jede der Grössen φ gleich 0 ist, mithin die Coefficienten in der Entwickelung von φ, die durch bestimmte Integrale gegeben sind, verschwinden. Setzt man nun einen solchen Ausdruck gleich 0 und macht alsdann $s-1$ Umgänge um den Punkt $x=a$, so ist die Determinante dieses Systems von s in Bezug auf $c_1, \ldots c_s$ linearen Gleichungen nicht identisch gleich 0, wenn nicht die Grössen φ gleich 0 sind; woraus

folgen würde, dass $c_1 = c_2 = \dots c_s = 0$ sein müssten. Diese Determinante ist nämlich

$$(x-a)^{r_1}(x-a)^{r_2}\dots(x-a)^{r_s} D,$$

wo D, wenn $e^{2\pi i r_1} = w_1, \dots e^{2\pi i r_s} = w_s$ gesetzt wird, gleich ist:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{r_1 0} & \dots & \left\{\varphi_{r_s 0} + \dots + \varphi_{r_s k}[\log(x-a)]^k\right\} \\ w_1\varphi_{r_1 0} & \dots & w_s\left\{\varphi_{r_s 0} + \dots + \varphi_{r_s k}[\log(x-a)+2\pi i]^k\right\} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ w_1^{s-1}\varphi_{r_1 0} & \dots & w_s^{s-1}\left\{\varphi_{r_s 0} + \dots + \varphi_{r_s k}[\log(x-a)+(s-1)2\pi i]^k\right\} \end{vmatrix}.$$

Wird D auf die Form gebracht:

$$(6.) \quad P_0 + P_1 \log(x-a) + \dots + P_r[\log(x-a)]^r,$$

wo die Grössen $P_0, \dots P_r$ einwerthig sind, so müssten diese einzeln verschwinden, wenn D identisch gleich Null wäre, weil sonst wegen der Vieldeutigkeit von log $(x-a)$ die Gleichung $P_0 + P_1 z + \dots + P_r z^r = 0$ unzählig viele Wurzeln hätte. P_r ist aber gleich

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_1 & w_2 & & w_s \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ w_1^{s-1} & w_2^{s-1} & & w_s^{s-1} \end{vmatrix} \varphi_{r_1 0}\varphi_{r_2 h}\dots\varphi_{r_s k},$$

und da hier die Determinante nicht verschwindet, so müsste eine der Grössen $\varphi_{r_1 0}, \varphi_{r_2 h}, \dots \varphi_{r_s k}$ gleich 0 sein, also einer der Coefficienten der höchsten Potenzen der Logarithmen in (5.) verschwinden, was gegen die Voraussetzung ist. Ein Ausdruck der Form (5.) kann also nicht identisch gleich 0 sein, ohne dass die Grössen φ gleich 0 sind. Damit ist alsdann zugleich bewiesen, dass die oben abgeleitete Gruppe (4.) linearunabhängiger Integrale und die übrigen in gleicher Weise gebildeten von einander linearunabhängig sind.

Man kann demnach mittels der particulären Integrale (2.) und (3.) jedem Integrale der Differentialgleichung (1.) in der Umgebung von $x = a$ die Form des Ausdruckes (5.) geben und letzteres nur auf eine Weise. Wir

wollen nun im Folgenden solche Differentialgleichungen untersuchen, unter deren Integralen der Form (5.) es welche giebt, wo die Functionen φ in ihren Entwickelungen Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl enthalten. Aus dem Umstande, dass der Ausdruck (6.) nicht identisch gleich Null sein kann, ohne dass die einwerthigen Coefficienten P gleich Null sind, ergiebt sich ein Satz, den Herr *Fuchs* (d. J. Bd. 68, S. 356) bewiesen hat, von dem wir Gebrauch machen werden, dass, wenn ein Ausdruck der Form

$$V=(x-a)^{\alpha}[\varphi_0+\varphi_1\log(x-a)+\cdots+\varphi_r(\log(x-a))^r]$$

worin die Grössen φ einwerthig sind, die Differentialgleichung (1.) erfüllt, die alsdann die Form annimmt

$$(x-a)^{\alpha}\{P_0+P_1\log(x-a)+\cdots+P_r[\log(x-a)]^r\}=0,$$

auch $(x-a)^{\alpha}P_r=0$ ist, oder dass auch $(x-a)^{\alpha}\varphi_r$, der Coefficient der höchsten Potenz von $\log(x-a)$ in V, die Differentialgleichung erfüllt.

2.

Ein Integral der Differentialgleichung

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y=0,$$

in welcher die Coefficienten p in der Umgebung von $x=a$ einwerthig sind, setzt sich aus den particulären Integralen (2.) und (3.) der Nr. 1 linear mit constanten Coefficienten zusammen und nimmt nur auf eine Weise die Form des Ausdruckes (5.) in Nr. 1 an. Demnach muss jede in dem Ausdrucke des Integrals vorkommende Summe der Form

$$(x-a)^r\{\varphi_0+\varphi_1\log(x-a)+\cdots+\varphi_k[\log(x-a)]^k\},$$

die sämmtliche Summanden enthält, in welchen sich die Exponenten der Potenzen von $x-a$ nur um ganze Zahlen unterscheiden, für sich die Differentialgleichung erfüllen, und in dieser Summe der Coefficient der höchsten Potenz des Logarithmus nach dem zu Ende des Nr. 1 angegebenen Satze des Herrn *Fuchs* ebenfalls. Hierin liegt der Satz:

I. *Hat die Differentialgleichung* (1.) *unter ihren Integralen überhaupt ein solches, in dessen Ausdruck der Form* (5.) *in* Nr. 1 *die Functionen* φ *in ihren Entwickelungen Potenzen von* $(x-a)^{-1}$ *nur in endlicher Zahl enthalten, so hat sie auch eines der Form* $(x-a)^r\varphi(x)$, *wo* $\varphi(x)$ *ein-*



werthig ist und in der Entwickelung nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält.

Daran schliessen sich zunächst folgende Sätze:

II. *Hat die Differentialgleichung* (1.) *s linearunabhängige Integrale mit Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl, und ist s die grösste Zahl solcher Integrale, die unter einander linearunabhängig sind, wo also $s \lesseqgtr m$ ist, so lassen sich alle Integrale derselben Art durch diese linear mit constanten Coefficienten ausdrücken. Und umgekehrt, wenn sich durch s linearunabhängige alle derselben Art ausdrücken lassen, so giebt es nicht mehr linearunabhängige, als s,* weil man die ursprünglichen s durch eben so viele neuen ausdrücken könnte, und dann auch alle übrigen durch letztere.

III. *Hat die Differentialgleichung* (1.) *s linearunabhängige Integrale der angegebenen Art, so hat nach* I. *dieser Nummer eines die Form*

$$y_1 = (x-a)^r \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, $\varphi(a)$ von 0 *verschieden ist. Setzt man in* (1.) *$y = y_1 \int z dx$, so dass man die Differentialgleichung*

$$(2.)\quad \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + q_1 \frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \cdots + q_{m-1} z = 0$$

mit in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Coefficienten erhält, so hat diese $s-1$ linearunabhängige Integrale genannter Art und umgekehrt.

Denn sind die der Differentialgleichung (1.)

$$y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_s,$$

so sind die der Differentialgleichung (2.)

$$\frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1},\ \ldots\ \frac{d}{dx}\frac{y_s}{y_1};$$

aus einer Relation

$$c_2 \frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} + \cdots + c_s \frac{d}{dx}\frac{y_s}{y_1} = 0$$

mit constanten Coefficienten würde

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_s y_s = 0$$

folgen. Und sind die der Differentialgleichung (2.)

$$z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_{s-1},$$

so sind die der (1.)

$$y_1,\ y_2 = y_1 \int z_1 dx,\ \ldots\ y_s = y_1 \int z_{s-1} dx;$$

eine Relation mit constanten Coefficienten

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_s y_s = 0$$

ist nicht möglich, weil aus dieser

$$c_2 \frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} + \cdots + c_s \frac{d}{dx}\frac{y_s}{y_1} = 0$$

folgen würde.

3.

Wenn die in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Coefficienten p der Differentialgleichung

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0$$

Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in ihren Entwickelungen in endlicher Anzahl enthalten und die Coefficienten auf die Form $\frac{f(x)}{(x-a)^s}$, gebracht sind, wo $s \geqq 0$ ist, $f(x)$ nur Potenzen mit positiven Exponenten enthält, wenn alsdann die gemeinschaftlichen Factoren $x-a$ in Zähler und Nenner weggehoben sind, so werde der Grad des Nenners in p_1 durch π_1 bezeichnet, in p_2 durch π_2, etc., in p_m durch π_m.

Im Folgenden sind es die positiven ganzen Zahlen

$$\pi_1 + m - 1,\ \pi_2 + m - 2,\ \ldots\ \pi_{m-1} + 1,\ \pi_m,$$

die eine wesentliche Bedeutung haben.

Man hat hier zunächst den Satz:

I. *Wenn in der Differentialgleichung* (1.) *mit in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Coefficienten die Coefficienten p_1 bis p_{m-1} Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl enthalten und diese Differentialgleichung überhaupt ein Integral hat, in dessen Ausdruck Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl vorkommen, so enthält der Coefficient p_m ebenfalls nur eine endliche Anzahl Potenzen von $(x-a)^{-1}$ und zwar, wenn g die grösste der Zahlen $\pi_1 + m - 1,\ \pi_2 + m - 2,\ \ldots\ \pi_{m-1} + 1$ bezeichnet, höchstens bis zu dem Exponenten g, wenn $g > m$, und höchstens bis zu dem Exponenten m, wenn $g \leqq m$ ist; also $\pi_m \leqq g$, wenn $g > m$ und $\pi_m \leqq m$, wenn $g \leqq m$ ist.*

Die Differentialgleichung hat nämlich nach Nr. 2, I. ein Integral der Form $(x-a)^r \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ nur Potenzen mit positiven Exponenten ent-

hält, $\varphi(a)$ von 0 verschieden ist. Setzt man dieses in die Differentialgleichung ein und bringt dieselbe auf die Form:

$$\frac{1}{y}\left\{\frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_{m-1}\frac{dy}{dx}\right\}=-p_m,$$

so sieht man sofort, dass p_m Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl enthält und der Grad des Nenners in p_m der im Satze angegebene ist.

4.

Es soll jetzt zuerst untersucht werden, wie die in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Coefficienten der Differentialgleichung

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y=0$$

beschaffen sein müssen, damit die Differentialgleichung nur solche Integrale hat, in deren Ausdrücken Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl vorkommen. Es ist dies die Differentialgleichung, deren Form Herr *Fuchs* bestimmt hat (d. J. Bd. 66, S. 139, Bd. 68, S. 359), indem er das System von m Gleichungen mit den m Unbekannten p_1 bis p_m auflöst, welches man durch Einsetzen der linearunabhängigen particulären Integrale (2.) und (3.) in Nr. 1 erhält. Wir wenden hier die Schlussweise von $m-1$ auf m an. Die Differentialgleichung (1.) hat unter der gemachten Voraussetzung jedenfalls ein Integral der Form $y_1=(x-a)^r\varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, $\varphi(a)$ von 0 verschieden ist. Setzt man $y=y_1\int z\,dx$, so erhält man die Differentialgleichung:

$$(2.)\quad \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+q_1\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}}+\cdots+q_m z=0,$$

wo

$$q_1=\frac{1}{y_1}\left\{m\frac{dy_1}{dx}+p_1 y_1\right\},$$

$$q_2=\frac{1}{y_1}\left\{\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{d^2y_1}{dx^2}+(m-1)p_1\frac{dy_1}{dx}+p_2 y_1\right\},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$q_r=\frac{1}{y_1}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots r}\dfrac{d^r y_1}{dx^r}+\dfrac{(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots(r-1)}p_1\dfrac{d^{r-1}y_1}{dx^{r-1}}\\ +\dfrac{(m-2)(m-3)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots(r-2)}p_2\dfrac{d^{r-2}y_1}{dx^{r-2}}+\cdots+(m-r+1)p_{r-1}\dfrac{dy_1}{dx}+p_r y_1\end{array}\right\}.$$

Die Differentialgleichung (2.) mit einwerthigen Coefficienten hat alsdann auch nur Integrale, in deren Ausdrücken Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl vorkommen (Nr. 2, III.).

Die Differentialgleichung der Ordnung $m=1$

$$(3.)\quad \frac{dy}{dx}+p_1 y=0,$$

die von der vorgeschriebenen Art sein soll, muss nun nach Nr. 3, I. den Coefficienten p von der Form $\frac{f(x)}{x-a}$ haben, wo $f(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält. Diese Form von p kann man unmittelbar aus dem Ausdrucke des vollständigen Integrals der Differentialgleichung

$$y=Ce^{-\int p_1 dx},$$

wo C eine Constante ist, verificiren.

Setzt man nun $m=2$, und sollen die Integrale der Differentialgleichung (1.) die verlangte Eigenschaft haben, dann muss dieses auch für die Differentialgleichung (2.) stattfinden. Nun ist nach dem eben Bewiesenen $q_1=m\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}+p_1=\frac{f(x)}{x-a}$, wo in $f(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten vorkommen; daher ist p_1 von derselben Form gleich $\frac{f_1(x)}{x-a}$, und dann muss nach Nr. 3, I. p_2 die Form haben $\frac{f_2(x)}{(x-a)^2}$, wo in $f_2(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten vorkommen.

Es sei jetzt bereits bewiesen, dass eine Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Coefficienten einwerthig sind, und die nur Integrale der angegebenen Art hat, die Form haben muss:

$$(4.)\quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\frac{F_1(x)}{x-a}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\frac{F_2(x)}{(x-a)^2}\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}}+\cdots+\frac{F_{m-1}(x)}{(x-a)^{m-1}}\,y=0,$$

wo in den Functionen F nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten vorkommen.

Wir beweisen dies alsdann für die m^{te} Ordnung. Wenn die Differentialgleichung (1.) also nur Integrale der angegebenen Eigenschaft hat, so muss dies auch bei der Differentialgleichung (2.) der Fall sein. Diese hat alsdann die Form (4.). Aus den Ausdrücken der Coefficienten q ergiebt sich hierauf, dass

$$p_1 = \frac{f_1(x)}{x-a},\ p_2 = \frac{f_2(x)}{(x-a)^2},\ \dots\ p_{m-1} = \frac{f_{m-1}(x)}{(x-a)^{m-1}}$$

sein muss, wo in den Functionen f nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten vorkommen. Nach Satz I. Nr. 3 muss dann

$$p_m = \frac{f_m(x)}{(x-a)^m}$$

sein, wo $f_m(x)$ ebenfalls nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält.

Damit ist also für eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung (1.)*, die die vorgeschriebene Eigenschaft haben soll, bewiesen, dass die Coefficienten p Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl enthalten dürfen, und dass die in* Nr. 3 *definirten Zahlen*

$$\pi_\alpha + m - \alpha \leqq m \quad (\alpha = 1, 2, \dots m)$$

sein müssen.

5.

Die in den Nummern 2 und 3 angegebenen Sätze und die in der vorigen Nummer angewandte Methode geben die Mittel, überhaupt Differentialgleichungen zu untersuchen, die unter ihren Integralen solche haben, in deren Ausdrücken Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl vorkommen. Man kann anschliessend an den Satz in Nr. 3 sofort folgenden allgemeineren aufstellen:

I. *Wenn die Differentialgleichung*

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0,$$

deren Coefficienten in der Umgebung von $x=a$ einwerthig sind, in den Coefficienten $p_1, p_2, \dots p_h$ Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl hat, und wenigstens $m-h$ linearunabhängige Integrale, deren Ausdrücke Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl enthalten, haben soll, so müssen die übrigen Coefficienten ebenfalls Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl enthalten, ferner, wenn von den in Nr. 3 *definirten Zahlen*

$$\pi_1 + m - 1,\ \pi_2 + m - 2,\ \dots\ \pi_h + m - h$$

die grösste $g > m$ ist, so müssen

$$\pi_{h+1} + m - h - 1,\ \dots\ \pi_{m-1} + 1,\ \pi_m \leqq g;$$

wenn aber $g \leqq m$ ist, so müssen

$$\pi_{h+1}+m-h-1, \ldots \pi_m \gtreqless m.$$

sein.

Zu dem Beweise fangen wir mit einer Differentialgleichung an, worin $m=h+1$. Alsdann gilt der Satz nach Nr. 3. Nehmen wir ihn alsdann für die $(m-1)^{te}$ Ordnung bereits als bewiesen und beweisen ihn für die m^{te}. Die Differentialgleichung (1.) hat nach Nr. 2, I. wenigstens ein Integral von der Form $y_1=(x-a)^r\varphi(x)$, worin $\varphi(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, $\varphi(a)$ von Null verschieden ist.

Setzen wir $y=y_1\int z dx$ in (1.), so erhalten wir die Differentialgleichung

$$(2.)\quad \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+q_1\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}}+\cdots+q_{m-1}z=0,$$

wo die einwerthigen Coefficienten q die in der vorigen Nummer angegebene Form haben. Diese Differentialgleichung hat alsdann nach der über die Differentialgleichung (1.) gemachten Voraussetzung und nach Satz III. Nr. 2 wenigstens $m-1-h$ linearunabhängige Integrale genannter Art. Die Coefficienten q_1 bis q_h enthalten Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl; dasselbe findet demnach, da der Satz I. dieser Nummer für die $(m-1)^{te}$ Ordnung bereits als bewiesen vorausgesetzt wird, für alle Coefficienten q statt. Bezeichnet man die in Nr. 3 definirten Zahlen π_1, π_2, etc. bei der Differentialgleichung (2.) durch $\pi'_1, \pi'_2, \ldots \pi'_{m-1}$ und die grösste der Zahlen $\pi'_1+(m-1)-1, \ldots \pi'_h+(m-1)-h$ durch g', so findet sich Folgendes:

a) Die Zahl g bei der Differentialgleichung (1.) sei $>m$.

Wenn aus der Reihe der Zahlen

$$\pi_1+m-1,\ \pi_2+m-2,\ \ldots\ \pi_h+m-h$$

zuerst

$$\pi_c+m-c=g>m$$

wird, so ist auch aus der Reihe

$$\pi'_1+(m-1)-1,\ \pi'_2+(m-1)-2,\ \ldots\ \pi'_h+(m-1)-h$$

zuerst

$$\pi'_c+(m-1)-c=g'=g-1>m-1.$$

Da ferner der Satz I. dieser Nummer für die Differentialgleichung (2.) als bewiesen vorausgesetzt wird, so sind

$$\pi'_{h+1}+(m-1)-h-1,\ \ldots\ \pi'_{m-1}\gtreqless g'.$$

Daraus folgt, dass die Coefficienten p_{h+1} bis p_{m-1} Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl enthalten und

$$\pi_{h+1}+m-h-1, \ldots \pi_{m-1}+1 \gtreqless g'+1=g$$

sind; und nun ergiebt sich aus Satz I. Nr. 3, dass auch p_m eine endliche Zahl Potenzen von $(x-a)^{-1}$ enthält und $\pi_m \gtreqless g$ ist.

b) Die Zahl g sei $\gtreqless m$.

Man findet dann, wie vorhin, dass

$$\pi'_1+(m-1)-1, \ldots \pi'_h+(m-1)-h \gtreqless m-1$$

sind und daher auch

$$\pi_{h+1}+(m-1)-h-1, \ldots \pi'_{m-1} \gtreqless m-1;$$

daraus folgt, dass

$$\pi_\alpha+m-\alpha \gtreqless m \quad (\alpha=1, 2, \ldots m \quad 1)$$

ist und nach Satz I. Nr. 3 auch $\pi_m \gtreqless m$.

Damit ist der angegebene Satz bewiesen. Aus demselben ergiebt sich unmittelbar der den folgenden Untersuchungen zu Grunde liegende Satz:

II. *Wenn alle in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Coefficienten p_1 bis p_m der Differentialgleichung* (1.) *Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl enthalten und von den in* Nr. 3 *definirten Zahlen π_1+m-1, $\pi_2+m-2, \ldots \pi_m$ die grösste $g>m$ ist, wenn ferner aus der Reihe dieser Zahlen π_h+m-h zuerst gleich g wird, so hat die Differentialgleichung höchstens $m-h$ linearunabhängige Integrale, in deren Ausdrücken Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl vorkommen.*

6.

In der Differentialgleichung

$$(1.) \quad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y=0$$

sollen die in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Coefficienten Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl haben. Wenn alsdann von den in Nr. 3 definirten Zahlen $\pi_1+m-1, \ldots \pi_m$ die grösste $g \gtreqless m$ ist, so hat nach einem Satze, den Herr *Fuchs* (d. J. Bd. 66, S. 148) bewiesen hat, die Differentialgleichung m linearunabhängige, also überhaupt nur Integrale, in deren Ausdrücken Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl vorkommen. Wenn $g>m$ ist und π_h+m-h zuerst gleich g, so hat sie nach Satz II. der vorigen Nummer deren höchstens $m-h$ linearunabhängige.

Man kann nun zunächst immer die Differentialgleichung (1.), in der $p_1, \ldots p_h$ willkürlich gegeben sind, und von den Zahlen $\pi_1+m-1, \ldots$

$\pi_h + m - h$ letztere die grösste ist und grösser als m, in den Coefficienten $p_{h+1}, \dots p_m$ so bestimmen, dass sie wirklich $m-h$ linearunabhängige Integrale jener Art hat. Dazu braucht man nur $m-h$ Functionen der Form

$$y_1 = (x-a)^{r_1} f_1(x), \quad \dots y_{m-h} = (x-a)^{r_{m-h}} f_{m-h}(x)$$

in die Differentialgleichung einzusetzen, worin die Grössen f in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und endlich und für $x=a$ von Null verschieden, die Exponenten r keine positiven ganzen Zahlen kleiner als $m-h-1$ sind und je zwei derselben sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden. Denn die Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & \frac{dy_1}{dx} & \dots & \frac{d^{m-h-1}y_1}{dx^{m-h-1}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ y_{m-h} & \frac{dy_{m-h}}{dx} & \dots & \frac{d^{m-h-1}y_{m-h}}{dx^{m-h-1}} \end{vmatrix}$$

ist alsdann nicht identisch Null, weil sie gleich

$$(x-a)^{r_1-(m-h-1)} \dots (x-a)^{r_{m-h}-(m-h-1)} (x-a)^{\frac{1}{2}(m-h)(m-h-1)} \sum_0^\infty c_\varepsilon (x-a)^\varepsilon$$

ist, wo

$$c_0 = f_1(a) f_2(a) \dots f_{m-h}(a) D$$

und

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & \dots & r_1(r_1-1)..(r_1-m+h+2) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & r_{m-h} & \dots & r_{m-h}(r_{m-h}-1)..(r_{m-h}-m+h+2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & r_1 \dots r_1^{m-h-1} \\ \cdot & \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1 & r_{m-h} \dots r_{m-h}^{m-h-1} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Die Coefficienten p_{h+1} bis p_m werden einwerthig, enthalten Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Zahl, und es ist nach Satz I. der vorigen Nummer $\pi_\alpha + m - \alpha \leqq g$ $(\alpha = 1, 2, \dots m)$; nach Satz II. derselben Nummer hat die Differentialgleichung nicht mehr linearunabhängige Integrale der genannten Art.

Es giebt aber auch, wie in den folgenden Nummern gezeigt werden wird, Differentialgleichungen (1.), die die Bedingung, dass $\pi_h + m - h$ zuerst gleich $g > m$ wird, erfüllen und weniger als $m-h$ linearunabhängige derartige Integrale haben. Wir wollen nun voraussetzen, dass in der Differentialgleichung (1.) $g > m$ und $\pi_h + m - h$ zuerst gleich g sei, alsdann die allgemeine Form der linearunabhängigen Integrale der angegebenen Eigenschaft bestimmen, deren Anzahl s, falls überhaupt welche vorkommen, $\leqq m-h$ ist.

Zunächst ergiebt sich aus den Sätzen I. und III. der Nr. 2, dass die s Integrale der angegebenen Art, die die Differentialgleichung (1.) der Nr. 2 hat, unter der Form dargestellt werden können:

$$y_1,\ y_2=y_1\int z\,dx,\ y_3=y_1\int dx\, z\int u\,dx,\ \dots\ y_s=y_1\int dx\, z\int dx\, u\dots\int w\,dx,$$

wo

$$y_1=(x-a)^{r_1}\varphi_1(x),\ z=(x-a)^{r_2}\varphi_2(x),\ \dots\ w=(x-a)^{r_s}\varphi_s(x)$$

ist, in den Grössen φ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten vorkommen und

$$\varphi_1(a),\ \varphi_2(a),\ \dots\ \varphi_s(a)$$

von Null verschieden sind. Nach geschehener Integration nehmen alle Integrale die Form an:

$$(x-a)^r\{f_0+f_1\log(x-a)+\dots+f_k(\log(x-a))^k\},$$

worin die Grössen f in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und endlich sind. Fasst man diejenigen, worin die Exponenten r sich bloss um ganze Zahlen unterscheiden, zu einer Gruppe zusammen, so enthält dasjenige Integral, welches in der Reihe $y_1,\ y_2,\ \dots\ y_s$ zuerst auftritt, keinen Logarithmus. Die Anzahl der Integrale in dieser Gruppe sei gleich λ'. Aus den Sätzen der Nr. 2 ergiebt sich, dass diese Gruppe durch eine der Form

$$y_1=(x-a)^r\varphi_1,\ y_2=y_1\int z\,dx,\ \dots\ y_{\lambda'}=y_1\int dx\, z\int dx\, u\dots\int t\,dx$$

ersetzt werden kann, worin $\varphi_1,\ z,\ u,\ \dots\ t$ in der Umgebung von $x=a$ einwerthig sind und Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl enthalten. *Diese Gruppe kann also an die Spitze der entsprechenden Gruppe* (4.) Nr. 1 *des Fundamentalsystems gestellt werden.*

Wir wollen die Form der Integrale dieser Gruppe jetzt bei der Differentialgleichung (1.) dieser Nummer näher untersuchen und haben dazu dasselbe Verfahren anzuwenden, welches Herr *Fuchs* (d. J. Bd. 66, S. 146) bei der Bestimmung der Form der Integrale der von ihm untersuchten Differentialgleichung gebraucht hat.

Setzt man in der Differentialgleichung (1.)

$$y_1=(x-a)^r\varphi_1(x)=(x-a)^r u,$$

wo $\varphi_1(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält und $\varphi_1(a)$ von Null verschieden ist, so geht (1.) über in

$$(2.)\quad \frac{d^m u}{dx^m}+p_1'\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}+\dots+p_m' u=0,$$



wo

$$p'_\alpha = \frac{m(m-1)\dots(m-\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot \ \dots \ \alpha} r(r-1)\dots(r-\alpha+1)\frac{1}{(x-a)^\alpha}$$

$$+\frac{(m-1)\dots(m-\alpha+1)}{1\cdot 2 \ \dots \ (\alpha-1)} r(r-1)\dots(r-\alpha+2)\frac{p_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+p_\alpha$$

ist. Bezeichnet man die in Nr. 3 definirten Zahlen π bei (2.) durch $\bar{\pi}$, so ist von $\bar{\pi}_1+m-1$ bis $\bar{\pi}_m$ die grösste zuerst $\bar{\pi}_h+m-h$ gleich der Zahl g bei der Differentialgleichung (1.), und zwar ist

$$\Big[p'_h(x-a)^{\bar{\pi}_h}\Big]_{x=a} = \Big[p_h(x-a)^{\pi_h}\Big]_{x=a}.$$

Es muss nun, damit der Differentialgleichung (2.) eine Entwickelung

$$u=\sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha,$$

wo c_0 von Null verschieden ist, genügen kann,

$$\Big[p'_m(x-a)^g\Big]_{x=a}=0$$

sein.

Dies giebt die Gleichung $(m-h)^{\text{ten}}$ Grades:

$$(3.)\quad \begin{cases} r(r-1)\dots(r-(m-h)+1)\Big[p_h(x-a)^{\pi_h}\Big]_{x=a} \\ +r(r-1)\dots(r-(m-h)+2)\Big[p_{h+1}(x-a)^{\pi_h+1}\Big]_{x=a} \\ \qquad +\dots+\Big[p_m(x-a)^{\pi_h+m-h}\Big]_{x=a}=0. \end{cases}$$

Der Gleichung (3.) genügt der Exponent r in $y_1=(x-a)^r u$; es sei diese Wurzel der Gleichung (3.) durch r_1 bezeichnet, und die übrigen Wurzeln seien $r_2, r_3, \dots r_{m-h}$.

Setzt man

$$y=y_1\int z\,dx$$

in der Differentialgleichung (1.), so geht dieselbe über in:

$$(4.)\quad \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+q_1\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}}+\dots+q_{m-1}z=0,$$

welche Differentialgleichung $\lambda'-1$ linearunabhängige Integrale der Form

$$(x-a)^r(f_0+f_1\log(x-a)+\dots+f_k(\log(x-a))^k)$$

hat, wo r ganzzahlig ist, die Grössen f in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und endlich sind.

Bezeichnet man die in Nr. 3 definirten Zahlen π_1 etc. bei der Differentialgleichung (4.) durch $\pi'_1, \dots \pi'_{m-1}$, so ist die grösste aus der Reihe

$$\pi'_1+(m-1)-1,\ \pi'_2+(m-1)-2,\ \dots\ \pi'_{m-1},$$

hier wiederum zuerst

$$\pi'_h+(m-1)-h$$

und zwar gleich $g-1$.

Die Differentialgleichung hat ein Integral der Form

$$z_1=(x-a)^{r'}\varphi_2(x),$$

wo r' ganzzahlig ist und $\varphi_2(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, $\varphi_2(a)$ von Null verschieden ist. r' ist alsdann Wurzel der Gleichung $(m-1-h)^{\text{ten}}$ Grades

$$(5.)\quad \begin{cases} r'(r'-1)\dots(r'-(m-1-h)+1)\left[q_h(x-a)^{\pi'_h}\right]_{x=a} \\ +r'(r'-1)\dots(r'-(m-1-h)+2)\left[q_{h+1}(x-a)^{\pi'_{h+1}}\right]_{x=a} \\ \qquad +\dots+\left[q_{m-1}(x-a)^{\pi'_h+m-1-h}\right]_{x=a}=0. \end{cases}$$

Setzt man in dieser Gleichung für

$$\left[q_{h+\alpha}(x-a)^{\pi'_h+\alpha}\right]_{x=a}$$

seinen Ausdruck

$$\frac{(m-h)(m-h-1)\dots(m-h-\alpha+1)}{1.2\dots\alpha}\left[p_h(x-a)^{\pi_h}\right]_{x=a} r_1(r_1-1)\dots(r_1-\alpha+1)$$
$$+\frac{(m-h-1)\dots(m-h-\alpha+1)}{1.2\dots(\alpha-1)}\left[p_{h+1}(x-a)^{\pi_h+1}\right]_{x=a} r_1(r_1-1)\dots(r_1-\alpha+2)+\cdots$$
$$+\left[p_{h+\alpha}(x-a)^{\pi_h+\alpha}\right]_{x=a},$$

so ergiebt sich, dass die Gleichung (5.) zu Wurzeln

$$(6.)\quad r_2-r_1-1,\ r_3-r_1-1,\ \dots\ r_{m-1}-r_1-1$$

hat. Eine dieser Wurzeln ist r', es sei diese durch r_2-r_1-1 bezeichnet. Man setze dann in der Differentialgleichung (4.)

$$z=z_1\int u\,dx$$

und reducire weiter. Auf diese Weise erhält man successive die λ' Integrale der vorliegenden Gruppe unter der Form

$$(7.)\quad \begin{cases} y_1,\ y_2=y_1\int z\,dx,\ \dots y_{\lambda'}=y_1\int dx\,z\int dx\,u\dots\int t\,dx,\ y_1=(x-a)^{r_1}\varphi_1(x), \\ z=(x-a)^{r_2-r_1-1}\varphi_2(x),\ u=(x-a)^{r_3-r_2-1}\varphi_3(x),\ \dots\ t=(x-a)^{r_{\lambda'}-r_{\lambda'-1}-1}\varphi_{\lambda'}(x), \end{cases}$$

wo

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots\ \varphi_{\lambda'}(x)$$

in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und endlich und für $x=a$ von Null verschieden und die Exponenten $r_1,\ r_2,\ \dots r_{\lambda'}$, die sich bloss um ganze Zahlen unterscheiden, Wurzeln der Gleichung (3.) sind.

Wenn man nun von einem Ausdrucke

(8.) $F=(x-a)^k\{\varphi_0+\varphi_1\log(x-a)+\varphi_2(\log(x-a))^2+\cdots+\varphi_n(\log(x-a))^n\}$,

wo die in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Grössen φ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthalten, und worin k so genommen ist, dass der Ausdruck für $x=a$ nicht Null wird und unendlich wie

$$a+b\log(x-a)+\cdots+l[\log(x-a)]^s$$

mit constanten Coefficienten a, b, ... l, die Bezeichnung gebraucht, die Herr *Fuchs* (d. J. Bd. 66, S. 155) gewählt hat, „*er gehöre zum Exponenten k*“, und die beiden von Herrn *Fuchs* (l. c.) gegebenen Sätze anwendet, 1) dass, wenn $G(x)$ eine wie F beschaffene Function ist, die zum Exponenten r gehört, alsdann $\int G(x)dx$ (wo die Integrationsconstante gleich Null genommen wird) ebenso beschaffen ist und zum Exponenten $r+1$ gehört, und 2) dass, wenn $G(x)$ zum Exponenten r und $G'(x)$ zu r' gehört, das Product $G(x)\cdot G'(x)$ zum Exponenten $r+r'$ gehört, so ergiebt sich: Die Integrale (7.) y_1 bis $y_{\lambda'}$ gehören zu den Wurzeln der Gleichung (3.) als zu ihren Exponenten.

Die Gleichung (3.) ist die nämliche, welche die Exponenten der Integrale in der Differentialgleichung $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(9.)\quad \frac{d^{m-h}y}{dx^{m-h}}+\frac{p_{h+1}}{p_h}\frac{d^{m-h-1}y}{dx^{m-h-1}}+\cdots+\frac{p_m}{p_h}=0$$

bestimmt. Diese Differentialgleichung (9.) hat nämlich die Form derjenigen, die nur Integrale mit Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl besitzen. Die Exponenten dieser Integrale werden nach einem von Herrn *Fuchs* (d. J. B. 66, S. 147) für diese Differentialgleichungen gegebenen Satze durch eine Gleichung bestimmt, welche bei der Differentialgleichung (9.) mit der Gleichung (3.) zusammenfällt.

Man kann nun die Resultate dieser Nummer in folgender Weise zusammenfassen:

I. *Die Differentialgleichung* (1.), *in welcher von den Zahlen*

$$\pi_1+m-1,\ \pi_2+m-2,\ \dots\ \pi_m$$

die grösste $g>m$ sein soll und π_h+m-h zuerst gleich g, hat höchstens $m-h$ linearunabhängige Integrale mit Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl. Hat sie deren nun wirklich s, so zerfallen dieselben in Gruppen von folgender Form:

$$y_1,\ y_2 = y_1\int z\,dx,\ y_3 = y_1\int dx\, z\int u\,dx, \ldots\ y_{\lambda'} = y_1\int dx\, z\int dx\, u \ldots \int t\,dx,$$
$$y_1 = (x-a)^{r_1}\varphi_1(x),\ z = (x-a)^{r_2-r_1-1}\varphi_2(x), \ldots\ t = (x-a)^{r_{\lambda'}-r_{\lambda'-1}-1}\varphi_{\lambda'}(x),$$
wo die Grössen φ in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und endlich und für $x=a$ von Null verschieden sind.

Die λ' Exponenten r_1 bis $r_{\lambda'}$ unterscheiden sich bloss um ganze Zahlen; die Integrale nehmen die Form des Ausdruckes (8.) an und gehören zu den Exponenten r_1 bis $r_{\lambda'}$.

Eine Gruppe umfasst alle Integrale, deren Exponenten sich bloss um ganze Zahlen unterscheiden.

Alle Exponenten, zu denen die verschiedenen Integrale gehören, sind Wurzeln der Gleichung $(m-h)^{\text{ten}}$ Grades (3.).

II. *Die Gleichung (3.) ist die nämliche, deren Wurzeln die Exponenten der Integrale der Differentialgleichung $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung (9.) bestimmen, die nur Integrale mit Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl hat.*

7.

Die Differentialgleichung

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0,$$

worin die in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Coefficienten Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl haben, und wo von den Zahlen π_1+m-1 bis π_m die grösste g grösser als m sein soll und zuerst $\pi_h+m-h=g$, hat nach Nr. 5, Satz II. höchstens $m-h$ linearunabhängige Integrale mit einer endlichen Anzahl Potenzen von $(x-a)^{-1}$ und die Form derjenigen, die sie wirklich hat, ist in der vorigen Nummer gegeben. Nach dem im Anfange der vorigen Nummer Gesagten wird sie nun zwar im Allgemeinen auch so viele haben; insofern man die Coefficienten p_1 bis p_h willkürlich wählen kann, so dass π_h+m-h zuerst $=g>m$ wird, und dann durch Einsetzen von $m-h$ linearunabhängigen Functionen $(x-a)^r f(x)$, wo $f(x)$ in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und endlich bleibt, die übrigen so bestimmt, dass allgemein

$$\pi_\alpha + m - \alpha \gtreqless g \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m)$$

ist und die Differentialgleichung diese Functionen zu Integralen hat.

Jedoch giebt es auch Differentialgleichungen von der Form (1.), *deren Coefficienten die angegebenen Bedingungen erfüllen, die aber weniger als $m-h$ linearunabhängige Integrale jener Art haben.* In der folgenden Nummer wird gezeigt werden, wie man auf solche Differentialgleichungen kommt. Um aber gleich hier allgemeinere zu bilden, benutzen wir den Zusammenhang einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung

$$(2.)\quad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y+q=Y+q=0$$

mit einer homogenen von einer um eine Einheit höheren Ordnung, den Herr *Fuchs* (d. J. B. 68, S. 368) angegeben hat, indem er die Gleichung aufstellt

$$(3.)\quad \frac{dY}{dx}q-Y\frac{dq}{dx}=0,$$

oder

$$(4.)\quad \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}+r_1\frac{d^m y}{dx^m}+\cdots+r_{m+1}y=0,$$

wo

$$(5.)\quad r_{\alpha+1}=\left\{\frac{dp_\alpha}{dx}+p_{\alpha+1}-p_\alpha\frac{d\log q}{dx}\right\},\ r_{m+1}=\frac{dp_m}{dx}-p_m\frac{d\log q}{dx}$$

ist. Aus (3.) folgt alsdann

$$(6.)\quad Y=Cq,$$

wo C eine Constante ist, und verbindet man hiermit noch die Gleichung

$$(7.)\quad Y=0,$$

so genügt ein Integral y von Gl. (2.) oder (7.) der Gleichung (4.) und umgekehrt ein Integral y von (4.) der Gl. (7.) oder $-\frac{y}{C}$ der Gl. (2.). Wenn nun die Gleichung (2.) ein Integral mit Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl haben soll, muss (4.) von derartigen Integralen, die linearunabhängig sind, eines mehr enthalten, als (7.). Und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, so genügt eines davon, mit einer gewissen Constanten multiplicirt, der Gleichung (2.), und das allgemeinste dieser Art von (2.) wird erhalten, wenn man zu diesem das allgemeinste derselben Art, welches der Gleichung (7.) genügt, addirt.

Wir wollen nun zunächst m gleich 1 setzen, alsdann (2.) und (7.) so bestimmen, dass diese keine derartigen Integrale haben.

Die Gleichungen (2.) und (7.) werden

$$(8.)\quad \frac{dy}{dx}+p_1y+q=0,$$

$$(9.)\quad \frac{dy}{dx}+p_1y=0.$$

Wenn r_1 willkürlich genommen wird gleich $\frac{f(x)}{(x-a)^n}$, $n>1$, wo $f(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, $f(a)$ von Null verschieden ist, so wird

$$p_1=r_1+\frac{d\log q}{dx}.$$

Die Gleichung (8.) hat zum vollständigen Integrale

$$y=e^{-\int p_1dx}\left\{C-\int qe^{\int p_1dx}dx\right\}$$

und (9.)

$$y=Ce^{-\int p_1dx},$$

wo C eine Constante ist. Nehmen wir q von der Form $(x-a)^r\varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten hat, so hat das Integral von (9.) Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in unendlicher Zahl; bestimmen wir dann q näher, so dass

$$\int qe^{\int p_1dx}dx=\int q^2e^{\int r_1dx}dx$$

einen Logarithmus enthält, wozu q von der Form $(x-a)^r$ sein könnte, so enthält auch das Integral von (8.) für beliebige Werthe von C Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in unendlicher Zahl. Die Gleichung (4.) hat dann auch nur solche Integrale; sie hat aber die Form

$$(10.)\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^n}\frac{dy}{dx}+\frac{f_2(x)}{(x-a)^{n+1}}y=0,\quad n>1,$$

wo f_1 und f_2 nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthalten, $f_1(a)$ von Null verschieden ist.

Man kann ferner in der Differentialgleichung (1.) p_1 willkürlich nehmen, so dass $\pi_1+m-1>m$ ist, und die übrigen Coefficienten so bestimmen, dass $\pi_1+m-1=g$ wird, die Differentialgleichung aber nur $m-2$ linearunabhängige Integrale der früher angegebenen Art hat. Für $m=2$ ist eine solche vorhin gebildet. Gesetzt nun, man könnte für die $(m-1)^{\text{te}}$ Ordnung bereits eine solche darstellen. Man nehme dann in der Gleichung (1.) Nr. 4 für p_1 den willkürlich gegebenen Werth und setze $y_1=(x-a)^r\varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, und bestimme dadurch in der Gleichung (2.) derselben Nummer q_1 und alsdann, was nach der Voraussetzung möglich ist, diese Gleichung (2.) so,

dass sie $m-1-2$ solcher Integrale hat. Dadurch werden $p_1, \dots p_{m-1}$ bestimmt, und wenn man y_1 in (1.) einsetzt, auch p_m, so dass

$$\pi_1+m-1=g>m$$

ist, (1.) nur $m-2$ linearunabhängige Integrale genannter Eigenschaft hat.

Es lässt sich dann auch die Differentialgleichung (1.) dieser Nummer so bestimmen, dass zuerst

$$\pi_h+m-h=g>m$$

wird und nur $m-h-1$ solcher Integrale vorhanden sind. Man nehme hierzu zuerst eine Differentialgleichung $(m-h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung und bestimme sie nach dem Vorhergehenden so, dass von den Zahlen

$$\pi_1+(m-h+1)-1, \dots \pi_{m-h+1}$$

die erste die grösste und $>m-h+1$ wird und die Differentialgleichung $m-h-1$ solcher Integrale hat. Nimmt man diese Gleichung alsdann zur Gleichung (7.) dieser Nummer, setzt in (2.)

$$y=e^w(x-a)^r$$

ein, wo $w=\frac{f(x)}{(x-a)^n}$ ist, $n\geqq 1$, $f(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, $f(a)$ von Null verschieden ist, und bestimmt dadurch

$$q=e^w(x-a)^{r+\alpha}\varphi(x),$$

wo α eine ganze Zahl ist, $\varphi(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, so hat die Differentialgleichung (4.) in der Umgebung von $x=a$ einwerthige Coefficienten mit Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Zahl. Von den Zahlen

$$\pi_1+(m-h+2)-1, \dots \pi_{m-h+2}$$

ist hier $\pi_2+(m-h+2)-2$ zuerst die grösste $>m-h+2$. Die Differentialgleichung (4.) hat das Integral

$$e^w(x-a)^r$$

mit unendlich vielen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, und wenn man r so wählt, dass es sich von den Exponenten von $x-a$, die in den Integralen von (7.) vorkommen, nicht um eine ganze Zahl unterscheidet, so hat (4.) jedenfalls nur die früheren $m-h-1$ linearunabhängigen Integrale der verlangten Eigenschaft. Und dieses Verfahren kann man fortsetzen bis zu einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung.

Man ersieht hieraus, dass die Differentialgleichung (1.), worin die Coefficienten die angegebene Bedingung erfüllen, nicht immer $m-h$ linearunabhängige Integrale der angegebenen Art hat.

8.

Wenn man nun der Differentialgleichung (1.) der vorigen Nummer durch eine Reihenentwickelung der Form

$$y=(x-a)^r.\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$$

zu genügen sucht, wo c_0 von Null verschieden ist, und man setzt $y=(x-a)^r.u$, so nimmt die Differentialgleichung für u die Form (2.) Nr. 6 an; r ist alsdann Wurzel der Gleichung $(m-h)^{\text{ten}}$ Grades (3.) derselben Nummer. Diese Wurzel werde durch r_1 bezeichnet, die übrigen seien $r_2, \dots r_{m-h}$. Setzt man dann in den Coefficienten p'_α der Gleichung (2.) in Nr. 6

$$r=r_1 \quad \text{und} \quad p'_\alpha(x-a)^{\varrho-m+\alpha}=Q_\alpha(x)=Q_\alpha(a)+(x-a)\,Q'_\alpha(x),$$

so kann man die Differentialgleichung auf die Form bringen;

$$(1.)\quad \begin{cases} Q_h(a)\,(x-a)^{m-h-1}\dfrac{d^{m-h}u}{dx^{m-h}}+Q_{h+1}(x-a)^{m-h-2}\dfrac{d^{m-h-1}u}{dx^{m-h-1}}+\cdots+Q_{m-1}(a)\dfrac{du}{dx}= \\ -(x-a)^{\varrho-1}\dfrac{d^m u}{dx^m}-(x-a)^{m-1}Q'_1(x)\dfrac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}-\cdots-(x-a)^{m-h}Q'_{m-h}(x)\dfrac{d^{m-h}u}{dx^{m-h}} \\ \qquad -\cdots-Q'_m(x)\,.\,u. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich von $k=0$ an für alle positiven ganzen Zahlen k:

$$(2.)\quad \begin{cases} c_{k+1}\left\{Q_h(a)(k+1)k\dots(k-m+h+2)+Q_{h+1}(a)(k+1)k\dots(k-m+h+3)+\cdots+Q_{m-1}(a)(k+1)\right\} \\ \qquad =A_{k0}\,c_k+A_{k1}c_{k-1}+\cdots+A_{kk}c_0, \end{cases}$$

wo die Grössen A sich aus den Coefficienten der Reihenentwickelungen, die auf der rechten Seite der Gleichung (1.) vorkommen, und positiven Zahlen durch Addition und Multiplication zusammensetzen.

Die Gleichung

$$(3.)\quad Q_h(a)k\,..(k-m+h+2)+Q_{h+1}(a)k\,..(k-m+h+3)+\cdots+Q_{m-1}(a)=0$$

stimmt mit Gleichung (5.) Nr. 6 überein und hat zu Wurzeln

$$r_2-r_1-1,\ \dots\ r_{m-h}-r_1-1.$$

Ist nun die Wurzel r_1 so beschaffen, dass sie sich von keiner der übrigen $r_2, \dots r_{m-h}$ bloss um eine ganze Zahl unterscheidet, so verschwindet der Factor von c_{k+1} in Gleichung (2.) nicht für $k=0$ oder irgend eine positive ganze Zahl, und alle Coefficienten der Reihenentwickelung sind demnach vollständig bestimmt. Wenn man nun aber die Convergenz dieser formell bestimmten Reihe nachzuweisen versuchen wollte, so könnte man nicht das gewöhnliche Mittel anwenden, dass man statt der Reihen auf der rechten Seite der Differentialgleichung (1.) andere einsetzt, deren Coefficienten alle positiv sind und grösser als die Moduln der entsprechenden

Coefficienten in den ursprünglichen Reihen, um dadurch das Nämliche für die Grössen A in der Gleichung (2.) zu erreichen, und dass man ferner die Grössen Q in dem Factor von c_{k+1} in der Gleichung (2.) durch solche ersetzt, welche diesen Factor immer positiv und von einem gewissen Werthe von k an kleiner machen, als der Modul des ursprünglichen Factors von c_{k+1} beträgt, um hierdurch und noch mit Hülfe der willkürlichen Grösse c_0 statt der ursprünglichen Entwickelung eine andere zu erhalten, deren Coefficienten alle positiv und grösser als die Moduln der entsprechenden in der ursprünglichen Reihe sind. Die auf diese Weise gebildete neue Reihe muss divergiren, da in Gleichung (2.) auf der rechten Seite höhere Potenzen von k vorkommen als auf der linken; und demnach, wenn die neuen Coefficienten ebenfalls durch c bezeichnet werden, der Modul des Verhältnisses $\frac{c_{k+1}}{c_{k+m-\varrho+1}}(x-a)^{\varrho-m}$ ins Unendliche wächst. Die durch die genannte Umformung aus der Differentialgleichung (1.) hervorgehende Differentialgleichung giebt hier direct ein Beispiel einer Differentialgleichung von der Form (1.) Nr. 7 von speciellerer Beschaffenheit der Coefficienten, die für y eine formelle Entwickelung $\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ zulässt, welche nicht convergirt. Weitere Beispiele von Differentialgleichungen, die Ausnahmen bilden und in den Coefficienten allgemeiner sind, liefern die in der vorigen Nummer angegebenen Differentialgleichungen, unmittelbar die der 2. Ordnung (10.), wo nach dem Vorhergehenden der Exponent r und die Coefficienten in der Entwickelung $(x-a)^r\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ vollständig bestimmt sind, diese Reihe aber nicht convergiren kann. Daraus folgt:

I. *Wenn die Wurzel r in der Gleichung* (3.) Nr. 6 *sich von keiner der übrigen um eine ganze Zahl unterscheidet, so existirt für y eine in den Coefficienten vollständig bestimmte Entwickelung* $(x-a)^r\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$, *worin c_0 von Null verschieden ist, die der Differentialgleichung* (1.) Nr. 7 *formell genügt, aber nicht immer convergirt.*

Wenn nun eine Gruppe von Wurzeln $r_1, \dots r_{\lambda}$ in der Gleichung (3.) Nr. 6 vorkommt, die sich bloss um ganze Zahlen unterscheiden und dieselben so angeordnet sind, dass der reelle Theil der folgenden nicht grösser, als der der vorhergehenden ist, so sind zunächst die Coefficienten in der Entwickelung $(x-a)^{r_1}\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ wieder vollständig

bestimmt. Falls aber diese Reihe nicht convergirt, so ist zuzusehen, ob bei der folgenden Wurzel, in welcher zuerst der reelle Theil kleiner, als in r_1 ist, sich die Coefficienten der Gleichung (2.) gemäss bestimmen lassen. Es sei diese Wurzel gleich $r_1 - k_1$, so verschwindet in der Gleichung (2.) der Factor von c_{k_1}, und es muss demnach die rechte Seite ebenfalls verschwinden. Alsdann bleibt c_{k_1} zunächst unbestimmt und die Coefficienten nehmen die Form an $c_\alpha = B_\alpha c_0$ für $\alpha < k_1$ und $c_\alpha = B'_\alpha c_{k_1} + B_\alpha c_0$ für $\alpha \geqq k_1$. Die Reihe $c_0 \Sigma \frac{c_\alpha}{c_0}(x-a)^\alpha$ kann nun höchstens für einen einzelnen Werth von $\frac{c_{k_1}}{c_0}$ convergiren, weil man sonst durch Subtraction zweier solcher Reihen eine convergente Reihenentwickelung der Form $(x-a)^{r_1}\sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, wo c_0 von Null verschieden wäre, für die Differentialgleichung herleiten könnte. Dass dieser Fall überhaupt vorkommt, kann man durch ein Beispiel nachweisen. Wählt man nämlich die Differentialgleichung zweiter Ordnung (10.) der vorigen Nummer so, dass die Wurzel der zugehörigen Gleichung (3.) Nr. 6 eine positive ganze Zahl k wird, was leicht geschehen kann, und bildet man nun nach den weiter folgenden Angaben der vorigen Nummer eine Differentialgleichung dritter Ordnung, in der $\pi_1 + m - 1 = g > m$ ist, die aber nur ein Integral der früher definirten Art hat, so ist dieses Integral von der Form $(x-a)^r \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, wo c_0 von Null verschieden ist, während die zugehörige Gleichung (3.) Nr. 6 die Wurzeln $r+k+1$ und r haben muss.

Aus der Reihe der Wurzeln $r_1, r_2, \dots r_{\bar\lambda}$ existire nun zuerst für r_k eine convergente Entwickelung der Form $y_1 = (x-a)^{r_k} \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, wo c_0 nicht verschwindet, während also in den vorhergehenden Wurzeln $r_1, \dots r_{k-1}$ der reelle Theil grösser als in r_k ist. Man setze dann $y = y_1 \int z dx$ und bilde die Differentialgleichung (4.) der Nr. 6. Die zu dieser gehörige Gleichung (5.) Nr. 6 hat unter ihren Wurzeln folgende

$$r_1 - r_k - 1, \dots r_{k-1} - r_k - 1, \; r_{k+1} - r_k - 1, \dots r_\lambda - r_k - 1.$$

Ein Integral der Form $(x-a)^{r'} \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, worin c_0 von Null verschieden und r' aus der vorstehenden Reihe von Wurzeln genommen ist, kann für diese Differentialgleichung zuerst nur für $r' = r_{k+1} - r_k - 1$ oder eine folgende Wurzel existiren, weil sonst der Ausdruck $y_1 \int z dx$ ein Integral der ursprünglichen Differentialgleichung der Form $(x-a)^{r_\alpha} \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, wo

c_0 nicht verschwindet, liefern würde, worin $\alpha < k$ wäre. Wendet man weiter das nämliche Verfahren wie bei (7.) Nr. 6 an, so ergiebt sich:

II. *Wenn aus der Gruppe von Wurzeln* $r_1, r_2, \dots r_{\bar{\lambda}}$ *in der Gleichung* (3.) Nr. 6, *die sich bloss um ganze Zahlen unterscheiden und so angeordnet sind, dass der reelle Theil der folgenden nicht grösser als der der vorhergehenden ist, zuerst bei* r_k *eine convergente Entwickelung der Form* $y = (x-a)^{r_k} \Sigma c_\alpha (x-a)^\alpha$, *wo* c_0 *von Null verschieden ist, der Differentialgleichung* (1.) *der vorigen Nummer genügt, so liefert diese Gruppe jedenfalls nicht mehr als* $\bar{\lambda} - k$ *linearunabhängige Integrale der vorgeschriebenen Art, die zu Exponenten aus der Reihenfolge* $r_k, r_{k+1}, \dots r_{\bar{\lambda}}$ *gehören. Die* λ' *Exponenten* r *in Satz* I. Nr. 6 *nehmen daher die Anordnung an, dass der reelle Theil des folgenden nicht grösser als der des vorhergehenden ist.*

Auf diese Weise erhält man also für die gesuchten linearunabhängigen Integrale der Differentialgleichung (1.) Nr. 7, *die Potenzen von* $(x-a)^{-1}$ *in endlicher Anzahl enthalten, formelle Entwickelungen, von welchen diejenigen, die convergiren, die Integrale, die wirklich vorhanden sind, liefern.* Die Beurtheilung der Convergenz dieser Entwickelungen wird in dem Falle, wo die Coefficienten der Differentialgleichung (1.) dieser Nummer rational sind, dadurch vereinfacht, dass man die Nenner wegmultiplicirt und statt der Gleichung (2.) eine andere Recursionsformel für die Coefficienten der Entwickelung aufstellt, die nur eine constante Anzahl derselben enthält. Aus dieser Formel lässt sich vielfach direct die Convergenz oder Divergenz der Reihenentwickelung erkennen. Es bleibt nun weiter zu untersuchen, inwiefern es für diese Convergenz allgemeinere Kennzeichen giebt, und ob durch weitere theoretische Betrachtungen sich noch andere Hülfsmittel finden lassen, die Integrale der angegebenen Art, die die Differentialgleichung (1.) der vorigen Nummer besitzt, zu bestimmen.

Berlin, im August 1871.

Zur Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

(Von Herrn *H. A. Schwarz* in Zürich.)

Im vierten Hefte des 73. Bandes dieses Journals hat Herr *Prym* in einer Abhandlung „Zur Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$" p. 340 bis 364 auf einen im XV. Jahrgange der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich (p. 113 bis 128) veröffentlichten Aufsatz Bezug genommen, durch dessen Abdruck an dieser Stelle einigen Lesern des Journals vielleicht ein Dienst geleistet wird. Bei dieser Gelegenheit sind zu dem erwähnten Aufsatze einige Anmerkungen hinzugefügt worden, welche hauptsächlich die Beziehungen zu anderen Bearbeitungen desselben Gegenstandes oder nahe verwandter Gebiete betreffen. Eine Fortsetzung und theilweise Erweiterung der in jenem Aufsatze enthaltenen Untersuchungen bildet den übrigen Inhalt der vorliegenden Mittheilung.

Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ für die Fläche eines Kreises.

In seiner Inauguraldissertation (Art. 18, 19, 21) und in seiner Abhandlung über die Theorie der *Abel*schen Functionen (d. Journ. Bd. 54, p. 112, 114) hat *Riemann* einige die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\triangle u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

für ein gegebenes Gebiet T unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen betreffende allgemeine Lehrsätze ausgesprochen, für welche meines Wissens ein strenger Beweis gegenwärtig noch nicht bekannt ist.

Auch für den einfachen und wichtigen Specialfall, in welchem das gegebene Gebiet eine schlichte Kreisfläche ist, können die bisherigen Untersuchungen, soweit meine Kenntniss derselben reicht, nicht als vollständig angesehen werden.

Wenn der Werth der gesuchten Function u in jedem Punkte der Begrenzung des Gebietes vorgeschrieben ist, und diese längs der Begrenzung vorgeschriebene Werthenreihe ausser der Bedingung, stetig zu sein, keiner anderen Beschränkung unterworfen wird, so ist die Annahme nicht zulässig, dass die gesuchte Function u längs der Begrenzung endliche partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, beziehungsweise $\frac{\partial u}{\partial p}$ besitze, *da unter den gemachten Voraussetzungen partielle Ableitungen der Function u längs des Randes im Allgemeinen überhaupt nicht existiren.* Auf diesen Umstand, auf den vor mehreren Jahren Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen aufmerksam gemacht hat, ist, soviel ich weiss, bisher nicht Rücksicht genommen worden.

Im Nachfolgenden beschränke ich mich auf die Betrachtung des Falles, in welchem das Gebiet der unabhängigen Variablen x und y eine die Ebene einfach bedeckende Kreisfläche S ist; jedoch mit Ausschliessung von Stetigkeitsunterbrechungen und unendlich grossen Werthen in der für die Function u längs der Begrenzung der Fläche S vorgeschriebenen Werthenreihe.

§. 1.

In der Ebene A, deren Punkte die complexe Grösse

$$z = x + yi = r \cdot e^{i\varphi}$$

geometrisch darstellen, sei gegeben ein ganz im Endlichen liegender, die Ebene allenthalben nur einfach bedeckender Bereich T, dessen Begrenzung von einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Linien gebildet wird.

Für den Bereich T sei definirt eine (reelle) Function u der beiden reellen unabhängigen Variablen x, y und zwar als eine endliche, stetige und eindeutige Function derselben für alle Punkte im Innern *und* auf der Begrenzung von T.

Es wird vorausgesetzt, dass die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

existiren, endliche, stetige und eindeutige Functionen von x und y sind und die Gleichung

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

erfüllen.

Jedoch werden diese, die Ableitungen betreffenden Voraussetzungen entweder

I. *nur* für alle *inneren* Punkte des Gebietes T

oder

II. auch für alle Punkte der Begrenzung von T *einschliesslich* gestellt.

Hiernach sollen die für u und für die Ableitungen von u gestellten Voraussetzungen im Folgenden als „Bedingungen I" und „Bedingungen II" von einander unterschieden werden.*)

---

*) Herr *Carl Neumann* fordert in zwei Abhandlungen: „Revision einiger allgemeinen Lehrsätze aus der Theorie des Logarithmischen Potentials", Mathematische Annalen von *Clebsch* und *Neumann*, Bd. 3, p. 325—349 und „Zur Theorie des Logarithmischen und des *Newton*schen Potentiales. Zweite Mittheilung", Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, math.-phys. Classe, October 1870, p. 264—321, ausser den in §. 1 angegebenen Bedingungen: *a.* „gleichmässige" Stetigkeit und *b.* die Existenz der Ableitung $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$ für das Innere des betrachteten Gebietes. Hierzu ist Folgendes zu bemerken:

a. Mit Recht hat Herr *Heine* darauf aufmerksam gemacht (dieses Journal, Bd. 71, p. 361), dass bei der Erklärung der Stetigkeit einer Function zweier oder mehrerer Argumente sorgfältig zu Werke gegangen werden muss, wenn diese Erklärung analytisch brauchbar sein soll. Insbesondere erweist sich folgende Definition: „Eine Function zweier Argumente ist eine stetige Function derselben, wenn diese Function innerhalb des in Betracht kommenden Gebietes für jeden Werth des ersten Arguments eine stetige Function des zweiten und gleichzeitig für jeden Werth des zweiten Arguments eine stetige Function des ersten ist", in den meisten Fällen als *unzureichend*, wenn es sich darum handelt, aus derselben Schlüsse zu ziehen. Diese Erklärung ist daher als *unbrauchbar* zu verwerfen, ganz abgesehen davon, dass dieselbe, wie Herr *Thomae* bemerkt hat, auch solche Functionen umfasst, welche gewöhnlich *unstetig* genannt werden, wie z. B. die Function $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ in einem den Punkt $x=0$, $y=0$ in seinem Innern enthaltenden Gebiete. Vergl. die Schrift des Herrn *Thomae*: „Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen", Halle 1870, Nebert, p. 13—16. — Bei Beginn meiner mathematischen Studien habe ich folgende Erklärung der Stetigkeit einer Function zweier Argumente kennen gelernt, die ich auch jetzt noch für die richtige halte: „Eine Function $f(x, y)$ ist in der Umgebung des Werthepaares x_0, y_0 eine stetige Function ihrer beiden (stetig veränderlichen) reellen Argumente, wenn es nach Annahme einer von Null verschiedenen, sonst hinsichtlich ihrer Kleinheit keiner Beschränkung unterworfenen positiven Grösse ε stets möglich ist, in der Umgebung des Werthepaares x_0, y_0 einen nach zwei Dimensionen ausgedehnten Bereich abzugrenzen, so dass für *alle*, zugleich dem ursprünglichen Bereiche der Variablen, für den die Function erklärt ist, und dem abgegrenzten

§. 2.

a. Sind u und u' zwei für denselben Bereich T den Bedingungen II (s. den vorhergehenden Paragraphen) genügende Functionen, so haben die beiden Integrale

$$\int(u\triangle u' - u'\triangle u)\,dT \text{ und } -\int\left(u\frac{\partial u'}{\partial p} - u'\frac{\partial u}{\partial p}\right)ds,$$

von denen das erste über den Bereich T selbst, das zweite über alle Begrenzungslinien desselben zu erstrecken ist, den Werth Null; das erste, weil $\triangle u$ und $\triangle u'$ beständig gleich Null sind, das zweite, weil es durch theilweise Integration aus dem ersten erhalten werden kann (s. *Green:* „An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Elec-

---

Bereiche zugehörenden Werthepaare x_0+h, y_0+k die Differenz $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ dem absoluten Betrage nach kleiner ist als ε. Hierbei ist die Gestalt jenes abgegrenzten Bereiches im Allgemeinen keinen Beschränkungen unterworfen. Genügt eine Function dieser Bedingung für alle dem Innern und für alle der Begrenzung eines gegebenen Bereiches der unabhängigen Variablen angehörenden Werthepaare x_0, y_0, so ist die betrachtete Function *für diesen Bereich* eine stetige Function ihrer Argumente". Es scheint mir kein Bedürfniss vorzuliegen, von dieser Erklärung abzugehen, da mit Hülfe einer von *Bolzano* ersonnenen und von Herrn *Weierstrass* weiter entwickelten Schlussweise ohne Schwierigkeit der Nachweis geführt werden kann, dass jede Function, welche im obigen Sinne für einen gegebenen Bereich eine stetige Function ihrer Argumente ist, für denselben Bereich auch in dem Sinne des Herrn *Heine* gleichmässig stetig ist. Da auch das Umgekehrte stattfindet, so decken sich die beiden Begriffe vollkommen. Auf der anderen Seite erwächst aber aus der Bemerkung des Herrn *Heine* die unabweisbare *Forderung*, welche insbesondere bei einem Existenzbeweise nicht unerfüllt bleiben darf, dass, wenn die Stetigkeit einer analytisch dargestellten Function *bewiesen* werden soll, durch den Beweis die Stetigkeit der Function in *genau demselben Umfange* dargethan werde, in welchem die Definition der Stetigkeit bei allgemeinen Untersuchungen vorausgesetzt werden muss, um analytisch brauchbar zu sein. Dieser Forderung habe ich in §. 5, in §. 8 und §. 11 zu entsprechen gesucht.

b. Die Forderung der Existenz der partiellen Ableitung $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ scheint mir *unnöthig* zu sein, da die Endlichkeit, Stetigkeit und Eindeutigkeit dieser Ableitung für das Innere des betrachteten Gebietes — man sehe §. 2 bis §. 5 des Textes — bereits eine nothwendige Folge der übrigen Voraussetzungen ist. Es mag bemerkt werden, dass im Gegentheil die in §. 1 hinsichtlich der zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ gemachten Voraussetzungen noch auf ein geringeres Mass zurückgeführt werden können, da die in §. 2 angeführten Sätze auch dann noch unverändert gelten, wenn in einzelnen Punkten oder längs einzelner Linien von der Forderung der Existenz zweiter Ableitungen abgesehen oder die Erfüllung der Gleichung $\Delta u = 0$ ungewiss gelassen wird. Vergl. die Formulirung der Bedingungen für den im Art. 10 der Dissertation *Riemanns* bewiesenen Lehrsatz.

tricity and Magnetism." Dieses Journal, Bd. 44, p. 360; *Riemanns* Inaug.-Diss., Art. 7 bis 10).*)

b. Setzt man $u' = 1$, also $\frac{\partial u'}{\partial p} = 0$, so ergiebt sich der Satz: Das über alle Begrenzungslinien eines Bereiches T, für welchen die Function u den Bedingungen II genügt, zu erstreckende Integral $\int \frac{\partial u}{\partial p} ds$ hat den Werth Null.

§. 3.

Eine Function u genüge für die Fläche S des mit dem Radius 1 um den Punkt $z=0$ beschriebenen Kreises den Bedingungen I.

Man setze $u' = \log r$ (s. *Riemanns* Dissertat. Art. 10). Die Curven constanter Werthe von u' sind concentrische Kreise, deren Mittelpunkt der Punkt $z=0$ ist. Sind R_1 und R_2 zwei specielle *zwischen* 1 und 0 liegende Werthe von r mit der Bedingung $1 > R_1 > R_2 > 0$, so genügen die Functionen u und u' für das von den beiden Kreisen mit dem Mittelpunkte $z=0$ und den Radien R_1 und R_2 begrenzte Ringgebiet T den Bedingungen II, und es sind daher die Voraussetzungen des Satzes §. 2, *a* erfüllt.

---

*) Am angeführten Orte stellt *Green* dieselben Bedingungen, welche in §. 1 als Bedingungen II bezeichnet worden sind. Eine analoge Voraussetzung findet statt bei dem Beweise, den *Gauss* für den Satz

$$\int V \frac{\partial V}{\partial p} ds = -\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] dT$$

giebt. (Werke, Bd. V., p. 226.) Derselben Einschränkung sind aber auch die Beweise zu unterwerfen, welche Herr *Durège* in der Schrift: „Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse", Leipzig, Teubner, 1864, p. 203 und Herr *C. Neumann* in der Schrift: „Das *Dirichlet*sche Princip", Leipzig, Teubner, 1865 p. 9. gegeben haben, da dieselben nur Uebertragungen des *Gauss*ischen Beweises auf den Fall zweier unabhängigen Variablen sind.

Auf der anderen Seite findet man in dem Aufsatze des Herrn *Betti*: „Sopra le funzioni sferiche", Annali di Matematica, II. Serie, Tomo I., p. 81—87 und in demjenigen des Herrn *Dini*: „Sopra le funzioni di una variabile complessa", ebendaselbst, Tomo IV., p. 159—174, die Untersuchung auf den Fall beschränkt, in welchem die Erfüllung der Bedingungen II gefordert wird. Hierbei zeigt sich jedoch eine andere Unzuträglichkeit, da die in den Endformeln auftretende, die gegebenen Randwerthe darstellende, sogenannte willkürliche Function keineswegs willkürlich gewählt werden darf, wenn die Bedingung endlicher Differentialcoefficienten einschliesslich des Randes gestellt wird. Welchen beschränkenden Voraussetzungen aber diese Function ausser der Bedingung stetig zu sein in diesem Falle zu unterwerfen ist, geht, wie mir scheint, aus jenen Untersuchungen nicht hervor.

Das über die ganze Begrenzung von T erstreckte Integral

$$\int\left(u\,\frac{\partial u'}{\partial p} - u'\,\frac{\partial u}{\partial p}\right)ds$$

hat demnach den Werth Null. Es ist zu zeigen, dass jedes der über die ganze Begrenzung von T erstreckten Integrale

$$\int u\,\frac{\partial u'}{\partial p}\,ds \quad \text{und} \quad \int u'\,\frac{\partial u}{\partial p}\,ds$$

für sich den Werth Null hat.

Längs des Kreises mit dem Radius R_1 hat u' den constanten Werth $\log R_1$ und längs des Kreises mit dem Radius R_2 den constanten Werth $\log R_2$. Es ist also

$$\int u'\,\frac{\partial u}{\partial p}\,ds = \log R_1 \cdot \int\limits_{(r=R_1)} \frac{\partial u}{\partial p}\,ds + \log R_2 \cdot \int\limits_{(r=R_2)} \frac{\partial u}{\partial p}\,ds.$$

Wendet man den Satz §. 2, b auf die Fläche des Kreises mit dem Radius R_1 und auf das Ringgebiet T an, so erhält man

$$\int\limits_{(r=R_1)} \frac{\partial u}{\partial p}\,ds = 0, \quad \int\limits_{(r=R_1)} \frac{\partial u}{\partial p}\,ds + \int\limits_{(r=R_2)} \frac{\partial u}{\partial p}\,ds = 0,$$

folglich ist auch

$$\int\limits_{(r=R_2)} \frac{\partial u}{\partial p}\,ds = 0.$$

Daher hat das Integral $\int u'\,\frac{\partial u}{\partial p}\,ds$ und also auch das Integral $\int u\,\frac{\partial u'}{\partial p}\,ds$ den Werth Null, wenn beide Integrale über die ganze Begrenzung von T erstreckt werden.

Es ergiebt sich für $r = R_1$, $\frac{\partial u'}{\partial p} = -\frac{1}{R_1}$ und für $r = R_2$, $\frac{\partial u'}{\partial p} = \frac{1}{R_2}$. Setzt man daher für ds seinen Werth $R_1 . d\varphi$, beziehlich $R_2 . d\varphi$ und bezeichnet den Werth der Function u in dem Punkte $z = r . e^{i\varphi}$ mit $u(r, \varphi)$, so erhält man aus der Gleichung $\int u\,\frac{\partial u'}{\partial p}\,ds = 0$ die folgende

$$\int_0^{2\pi} u(R_2, \varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} u(R_1, \varphi)\,d\varphi.$$

In dieser Gleichung sind R_2 und R_1 zwei von einander unabhängige veränderliche Grössen, welche alle Werthe zwischen 0 und 1 annehmen können, wobei jedoch die Werthe 0 und 1 zunächst noch ausgeschlossen sind. Nun folgt aber aus der Voraussetzung, dass die Function u eine

stetige Function der Variablen x und y, also auch der Variablen r und φ ist, dass der Werth des Integrals $\int_0^{2\pi} u(r, \varphi)\, d\varphi$ für alle Werthe von r zwischen 0 und 1, einschliesslich der Werthe 0 und 1, sich mit dem Werthe von r nicht anders als stetig ändern kann. Aus diesem Grunde bleibt die obige Gleichung, obgleich bei deren Herleitung zunächst vorausgesetzt wurde, dass R_2 und R_1 von 0 und 1 verschieden seien, auch dann noch bestehen, wenn $R_2=0$ und $R_1=1$ gesetzt wird. Für den Werth $R_2=0$ geht das Integral auf der linken Seite in $2\pi . u(0)$ über, wenn mit $u(0)$ der Werth von u im Punkte $z=0$ bezeichnet wird. Es besteht daher die Gleichung

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \varphi)\, d\varphi.$$

§. 4.

Bei zweckmässig geänderter Bestimmung der Function u' führt die im vorhergehenden Paragraphen entwickelte Schlussweise, welche dem Art. 10 der Dissertation *Riemanns* entnommen ist, auch zu einem Ausdruck für den Werth $u(r, \varphi)$ der Function u in einem beliebigen, dem Innern der Kreisfläche angehörenden Punkte $z_0 = r . e^{i\varphi}$, unter der alleinigen Voraussetzung, dass die Function u für die Fläche S den Bedingungen I genüge.

Dem Punkte $z_0 = r . e^{i\varphi}$ innerhalb der Fläche S werde zugeordnet der Punkt $z_0' = \frac{1}{r} e^{i\varphi}$ ausserhalb derselben; $0 < r < 1$. Alle Punkte z, deren Abstände von den Punkten z_0 und z_0', $[z - z_0]$ und $[z - z_0']$, ein constantes Verhältniss haben, $\frac{[z-z_0]}{[z-z_0']} = r . t$, mit der Einschränkung $0 \leqq t \gtreqless 1$, liegen auf einem der Fläche S angehörenden Kreise, dessen Mittelpunkt c und dessen Radius R durch die Gleichungen

$$c = z_0 \cdot \frac{1-t^2}{1-r^2 t^2}, \quad r = \frac{t(1-r^2)}{1-r^2 t^2}, \quad z_0 - c = z_0 . R . t$$

gegeben werden. Für $t=1$ fällt dieser Kreis mit der Begrenzung von S zusammen, für $t=0$ geht derselbe in einen Punkt, nämlich in den Punkt z_0 über.

Zu jedem Punkte z von S gehört nach dem Vorhergehenden, sobald der Punkt $z_0 = r . e^{i\varphi}$ fixirt ist, *ein* Werth von t, $0 \leqq t \gtrless 1$, also auch je *ein* Werth von c und R. Setzt man nun $z - c = R . e^{i\psi}$, so entspricht jedem Punkte z von S mit Ausnahme des Punktes z_0 *ein* Werth von ψ, welcher der Bedingung $0 \gtrless \psi < 2\pi$ genügt, und für den die Gleichung $z - c = R . e^{i\psi}$ erfüllt ist. Da auch umgekehrt zu jedem Werthepaare t, ψ nur *ein* Werth von z gehört, so können t und ψ als unabhängige Variable gewählt werden. Es geht dann die Function u von x und y in eine Function von t und ψ über. Der dem Werthepaare t, ψ eindeutig entsprechende Werth von u möge mit $u[t; \psi]$ bezeichnet werden. Für die Werthe $t = 1$ und $t = 0$ ergeben sich die Identitäten $u[1; \psi] = u(1, \psi)$, $u[0; \psi] = u(r, \varphi)$. Auch in Beziehung auf die Variablen t und ψ ändert sich die Function u für alle in Betracht kommenden Werthepaare mit beiden Argumenten stetig.

Man setze u' gleich dem reellen Theile der analytischen Function $\log \frac{z - z_0}{z - z_0'}$,

$$u' = \log \frac{[z - z_0]}{[z - z_0']} = \log (r . t).$$

Es seien t_1 und t_2 zwei specielle Werthe von t, welche beide zwischen 1 und 0 liegen, mit der Bedingung $1 > t_1 > t_2 > 0$. R_1 und R_2 seien die Radien der diesen Werthen von t entsprechenden zwei Kreise, T bezeichne das von diesen beiden Kreisen begrenzte Ringgebiet.

Nun genügen die Functionen u und u' für die Fläche T, die Function u für die Fläche des Kreises mit dem Radius R_1 den Bedingungen II; längs beider Begrenzungslinien von T hat die Function u' je einen constanten Werth. Mittelst derselben Schlüsse wie in §. 3 wird daher gefolgert, dass das über die ganze Begrenzung von T erstreckte Integral $\int u \frac{\partial u'}{\partial p} ds$ auch in dem vorliegenden Falle den Werth Null hat.

Man erhält für $\frac{\partial u'}{\partial p}$ längs der beiden den Werthen $t = t_1$, $t = t_2$ entsprechenden Begrenzungslinien von T beziehlich die Werthe

$$-\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1 - r^2 t_1^2}{1 - 2 r t_1 \cos (\psi - \varphi) + r^2 t_1^2}$$

und

$$\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1 - r^2 t_2^2}{1 - 2 r t_2 \cos (\psi - \varphi) + r^2 t_2^2}.$$

Wenn daher für ds sein Werth $R_1 . d\psi$, beziehlich $R_2 . d\psi$ gesetzt wird, so ergiebt sich aus der Gleichung $\int u \frac{\partial u'}{\partial p} ds = 0$ die folgende

$$\int_0^{2\pi} u[t_2;\psi] \frac{1-r^2 t_2^2}{1-2rt_2 \cos(\psi-\varphi)+r^2 t_2^2} \cdot d\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi} u[t_1;\psi] \frac{1-r^2 t_1^2}{1-2rt_1 \cos(\psi-\varphi)+r^2 t_1^2} \cdot d\psi.$$

Die Grössen t_1 und t_2 sind von einander unabhängig und können alle Werthe zwischen 1 und 0 annehmen, ausgenommen die Werthe 1 und 0 selbst. Aus den über die Function u gemachten Voraussetzungen folgt aber, dass für alle Werthe von t zwischen 1 und 0, einschliesslich der Werthe 1 und 0, der Werth des Integrals

$$\int_0^{2\pi} u[t;\psi] \frac{1-r^2 t^2}{1-2rt \cos(\psi-\varphi)+r^2 t^2} d\psi$$

sich mit dem Werthe von t nicht anders als stetig ändern kann; daher bleibt die obige Gleichung auch dann noch bestehen, wenn $t_2 = 0$, $t_1 = 1$ gesetzt wird. Für den Werth $t_2 = 0$ geht die linke Seite der Gleichung in $2\pi . u(r, \varphi)$ über, während die rechte Seite für $t_1 = 1$ in

$$\int_0^{2\pi} u(1, \psi) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2} d\psi$$

übergeht.

Es besteht daher, wenn die Function u für die Kreisfläche S den Bedingungen I genügt, für alle Werthe von r, welche kleiner sind als 1, und für alle Werthe von φ die Gleichung

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \psi) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2} d\psi.$$

(Vergl. *C. Neumann:* „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$." Dieses Journal, Bd. 59, S. 364.)*)

---

*) Das bestimmte Integral, auf welches die Untersuchung des §. 4 geführt hat, und die entsprechende Formel, durch welche die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

für das Innere einer Kugel integrirt wird, wenn der Werth der Function V an der Oberfläche der Kugel vorgeschrieben ist und die Bedingungen, denen diese Function unterworfen wird, den in §. 1 angegebenen Bedingungen I analog sind, findet sich in

Also ist der Werth der Function u in einem beliebigen Punkte $z=r.e^{i\varphi}$ im Innern der Kreisfläche unter den angegebenen Voraussetzungen nur abhängig von denjenigen Werthen, welche die Function u auf der Peripherie des Kreises annimmt, und ausserdem von den Polarcoordinaten jenes Punktes, bezogen auf den Mittelpunkt des Kreises als Pol; überdiess ist $u(r,\varphi)$ durch die genannten Grössen eindeutig ausgedrückt.

Wenn es daher eine Function u giebt, welche für die Fläche eines Kreises den Bedingungen I Genüge leistet und auf der Peripherie desselben mit einer gegebenen Function $f(\varphi)$ dem Werthe nach übereinstimmt, so ist die Function durch diese Bedingungen bestimmt, und es giebt nur *eine* solche Function.

---

verschiedenen Abhandlungen *Poissons* angegeben: Journal de l'École polytechnique, cah. 18, pag. 422 (1815); cah. 19, pag. 150, 155, 433 (1823). Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1823, pag. 575. Additions à la Connaissance des Tems pour l'année 1829, pag. 329; pour l'année 1831, pag. 49. Philosophical Magazine, July 1827. Théorie mathématique de la chaleur, Paris 1835, chap. VII et VIII.

Man wird auch in dem Beweise, der in §. 5 unter *b.* enthalten ist, die Grundgedanken des *Poisson*schen Beweises leicht wiedererkennen.

Der in §. 3 und in §. 4 enthaltene Beweis beruht im Wesentlichen darauf, dass zunächst eine Formel, welche partielle Ableitungen der Function u nicht mehr enthält, unter Voraussetzung der Bedingungen II hergeleitet und hierauf ein Grenzübergang ausgeführt wird, welcher gestattet, an die Stelle der Bedingungen II die Bedingungen I treten zu lassen. Zu demselben Ziele führt auch folgende Anordnung des Beweises, welche dem entsprechenden *Green*schen Beweise und der von *Riemann* und anderen Mathematikern in Vorlesungen und Abhandlungen gegebenen Darstellung dieses Beweises vielleicht noch etwas näher steht.

Durch Anwendung der Schlüsse des §. 3 auf die Fläche eines Kreises mit dem Radius R, für welche eine Function u den Bedingungen I genügt, ergiebt sich:

$$(\text{I.})\quad 2\pi.u(0)=\int u\,\frac{\partial\log r}{\partial r}\,ds=\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\,d\varphi.$$

Es werde nun um den Punkt $z=0$ als Mittelpunkt mit dem Radius R_1 $(R_1<R)$ ein Kreis beschrieben und ebenso um den Punkt $z_0=r.e^{i\varphi}$ $(0<r<R_1)$ als Mittelpunkt ein Kreis mit dem Radius R_2 $(R_2<R_1-r)$. Man setze $\frac{R_1^2}{r}e^{i\varphi}=z_0'$ und bezeichne die Abstände irgend eines Punktes z von den Punkten z_0 und z_0' beziehlich mit ϱ und ϱ'; man setze ferner $u'=\log\varrho-\log\varrho'$ und wende auf das von den Kreisen $r=R_1$ und $\varrho=R_2$ begrenzte Ringgebiet den Satz §. 2, *a* an, so ergiebt sich durch Schlüsse, welche den im Text angegebenen ganz analog sind

$$\int u\,\frac{\partial\log\varrho}{\partial\varrho}\,ds=\int_0^{2\pi}u(R_1,\psi)\,\frac{R_1^2-r^2}{R_1^2-2R_1r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi.$$

Hieraus folgt mit Benutzung der Gleichung (I.) beim Uebergange von R_1 in R

$$(\text{II.})\quad u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\psi)\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi.$$

§. 5.

Im Vorhergehenden ist gezeigt worden, dass jede Function u, welche für eine Kreisfläche S den Bedingungen I genügt, durch diejenigen Werthe eindeutig bestimmt ist, welche dieselbe auf dem Rande von S annimmt. Es entsteht nun die Frage, ob für eine solche Function u die Reihe der Randwerthe $u(1,\varphi)=f(\varphi)$ willkürlich vorgeschrieben werden kann?

Diese Frage beantwortet folgender Lehrsatz:

Wenn längs des Randes der Kreisfläche S eine für alle Werthe des reellen Argumentes φ endliche, stetige und eindeutige reelle Function $f(\varphi)$, welche bei Vermehrung des Argumentes um 2π periodisch in sich zurückkehrt, sonst aber keiner weiteren Beschränkung unterliegt, willkürlich vorgeschrieben ist, so giebt es jedesmal eine (und nach dem Vorhergehenden nur eine einzige) Function u, welche für die Fläche S den Bedingungen I genügt und längs des Randes von S mit der gegebenen Function $f(\varphi)$ übereinstimmt.

Diese Function wird für alle Punkte $z=r.e^{i\varphi}$ im Innern von S, $r<1$, dargestellt durch das Integral

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi.$$

Der Beweis dieses Satzes zerfällt in zwei Theile; in dem ersten Theile (*a.*) ist zu zeigen, dass die durch die vorstehende Gleichung definirte Function $u(r,\varphi)$ für alle dem Innern von S angehörenden Punkte $z=r.e^{i\varphi}=x+yi$ in Beziehung auf die Variablen x und y partielle Ableitungen aller Ordnungen besitzt und der partiellen Differentialgleichung $\triangle u=0$ genügt; in dem zweiten Theile (*b.*) hingegen ist der Nachweis zu führen, dass die Function $u(r,\varphi)$ auch in der Nähe des Werthes $r=1$ eine stetige Function ihrer Argumente ist und für $r=1$ in die Function $f(\varphi)$ *stetig* übergeht.

a. Die durch das Integral

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\cdot d\psi$$

definirte Function u stimmt überein mit dem reellen Theile der durch die Gleichung

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cdot\frac{e^{\psi i}+z}{e^{\psi i}-z}\cdot d\psi$$

für alle Werthe von z, deren absoluter Betrag r kleiner ist als 1, mit dem Charakter einer ganzen Function eindeutig definirten analytischen Function $F(z)$ des complexen Argumentes $z = r.e^{i\varphi} = x + yi$.

Daher besitzt die Function u für alle im Innern der Kreisfläche liegenden Punkte z in Beziehung auf die unabhängigen Variablen x und y partielle Ableitungen aller Ordnungen und genügt in demselben Umfange der Differentialgleichung $\Delta u = 0$.

b. Wegen der vorausgesetzten Periodicität der Function $f(\psi)$ kann man statt des Integrals

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\cdot d\psi$$

das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi+\psi)\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2}\cdot d\psi$$

setzen, und da für alle Werthe von r, welche kleiner sind als 1, den Werth $r=1$ ausgeschlossen, das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2}\cdot d\psi$$

den Werth 1 hat, so gilt in demselben Umfange die Gleichung

$$u(r,\varphi) = f(\varphi) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(\varphi+\psi) - f(\varphi)]\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2}\,d\psi.$$

Es ist nun zu zeigen, dass es möglich ist, für die Differenz $1-r$ eine Grenze festzusetzen, so dass für alle Werthe von r, für welche die Differenz $1-r$ von Null verschieden ist und jene Grenze nicht überschreitet, und für alle Werthe von φ der Werth des Integrals in der vorstehenden Gleichung dem absoluten Betrage nach kleiner ist als eine beliebig kleine vorgeschriebene Grösse.

Wegen der Periodicität der Function $f(\varphi)$ kann das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$, über welches sich die Integration erstreckt, wenn mit δ eine kleine positive Grösse bezeichnet wird, durch die beiden Intervalle von δ bis $2\pi-\delta$ und von $-\delta$ bis $+\delta$ ersetzt werden.

Während ψ sich in dem Intervalle von δ bis $2\pi-\delta$ befindet, ist

der unter dem Integralzeichen vorkommende Nenner stets grösser als $2r(1-\cos\delta)$. Die Differenz $f(\varphi+\psi)-f(\varphi)$ bleibt stets kleiner als $2g$, wenn g den grössten Werth des absoluten Betrages von $f(\varphi)$ bezeichnet. Folglich ist der Beitrag, den dieses Intervall zu dem Werthe des Integrals liefert, numerisch kleiner als $\frac{g(1-r^2)}{r(1-\cos\delta)}$. Wie klein man aber auch die Grösse δ, die immer von Null verschieden bleibt, in der Folge zu wählen für gut finden wird, durch entsprechende Verkleinerung von $1-r$ kann man über die Kleinheit von $\frac{g(1-r^2)}{r(1-\cos\delta)}$ gebieten.*)

Es bleibt noch das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta}[f(\varphi+\psi)-f(\varphi)]\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2}\,d\psi$$

zu betrachten.

Bezeichnet man mit ε eine Grösse, welche der absolute Betrag der Differenz $f(\varphi+\psi)-f(\varphi)$ in dem Intervalle $-\delta \leqq \psi \gtreqless \delta$ nicht überschreitet, so ist der Werth dieses Integrals numerisch kleiner als

$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2}\,d\psi,$$

also auch kleiner als

$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2}\,d\psi,$$

d. h. kleiner als ε.

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Function $f(\varphi)$ lässt sich nun, wie klein auch die von Null verschiedene Grösse ε angenommen wer-

---

*) Noch engere Grenzen ergiebt folgende Schätzung. Das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}[f(\varphi+\psi)-f(\varphi)]\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2}\,d\psi$$

ist dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{g}{\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2}\,d\psi = \frac{2g}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1-r}{1+r}\cdot\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\delta\right),$$

also auch kleiner als

$$\frac{4g}{\pi(1+r)}\cdot\frac{1-r}{\delta}.$$

den möge, stets eine von Null verschiedene Grösse δ angeben, so dass für alle dem absoluten Betrage nach die Grösse δ nicht überschreitenden Werthe von ψ und zugleich für alle Werthe von φ der absolute Betrag der Differenz $f(\varphi+\psi)-f(\varphi)$ kleiner ist als ε; es verschwindet daher das angegebene Integral für alle Werthe von φ gleichzeitig mit δ.

Hiermit ist der oben ausgesprochene Satz in allen seinen Theilen bewiesen.

Für die Formulirung des hier mitgetheilten Beweises ist eine Forderung massgebend gewesen, welche im Januar d. J. von Herrn *Heine* brieflich mir gestellt wurde, im Wesentlichen des Inhalts: Wie klein auch eine von Null verschiedene Grösse ε' angenommen werden mag, es muss möglich sein, eine von Null verschiedene Grösse ϱ anzugeben, so dass — für alle Werthe von r, für welche die Differenz $1-r$ von Null verschieden und kleiner als ϱ ist, und *zugleich für alle Werthe von* φ — der absolute Betrag der Differenz $u(r, \varphi)-f(\varphi)$ kleiner ist als die Grösse ε'.

Näheres über die Bedeutung dieser Forderung enthält eine Abhandlung des Herrn *Heine:* „Ueber trigonometrische Reihen"*), eine Abhandlung, welche alle Mathematiker mit lebhafter Freude begrüssen werden.

Ein analoges Verfahren führt zu einem strengen Beweise der entsprechenden Formel, durch welche die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

für das Innere eines kugelförmigen Raumes integrirt wird, an dessen Oberfläche die Function V vorgeschriebene Werthe annehmen soll.

Hinsichtlich dieser Aufgabe möge auf zwei Schriften des Herrn *C. Neumann* verwiesen werden, deren Titel folgen:

„Lösung des allgemeinen Problemes über den stationären Temperaturzustand einer homogenen Kugel." Halle, bei H. W. Schmidt, 1861.

„Allgemeine Lösung des Problemes über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird." Halle, bei H. W. Schmidt, 1862.

---

*) Dieses Journal, Bd. 71, S. 353.

§. 6.

Die analytische Function $F(z)$ ist im Vorhergehenden durch ein bestimmtes Integral dargestellt worden. Aus demselben ergiebt sich eine zweite Darstellung der Function $F(z)$ durch eine für alle Werthe von z, deren absoluter Betrag kleiner ist als 1, unbedingt convergirende, nach Potenzen von z mit ganzen positiven Exponenten fortschreitende Reihe

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi)\,d\psi + \sum_{(m=1,2,\ldots\infty)} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi)\,e^{-mi\psi}\,d\psi \,.\, z^m.$$

Die Function $u(r, \varphi)$ ist der reelle Theil der Function $F(z)$; man erhält daher aus der vorstehenden Gleichung die Entwickelung

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi)\,d\psi$$

$$+ \sum_{(m=1,2,\ldots\infty)} \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi)\cos m\psi\,d\psi \,.\, \cos m\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi)\sin m\psi\,d\psi \,.\, \sin m\varphi\right).\, r^m.$$

Wird r gleich 1 gesetzt, so geht die rechte Seite der vorstehenden Gleichung in die *Fourier*sche Reihe für die Function $f(\varphi)$ über.*)

Mitunter ist es nützlich, einen Werth zu kennen, welchen der absolute Betrag der Differenz $u(r, \varphi) - u(0)$ als Function von r nicht überschreiten kann, sobald die Werthe $u(1, \varphi) = f(\varphi)$ eine endliche Grösse g dem absoluten Betrage nach nicht überschreiten.

Man erhält

$$[u(r, \varphi) - u(0)] < [F(z) - F(0)] < 2g \,.\, \frac{r}{1-r};$$

oder

---

*) In seiner Schrift: „Das *Dirichlet*sche Princip" ist Herr *C. Neumann* von der Darstellung einer der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für die Fläche eines Kreises genügenden Function durch das über den Rand der Kreisfläche zu erstreckende *Poisson*sche Integral (s. §. 4 und die Anmerkung p. 226 wieder abgegangen und hat die *Fourier*sche Reihe zum Ausgange gewählt. Einen ähnlichen Gedankengang deutet Herr *Schläfli* im 72. Bande dieses Journals pag. 283 an. Dass diese Methode nur eine heuristische ist und einer vollständigen Deduction bedarf, ist der Kern der von Herrn *Heine* (d. Journ., Bd. 71, p. 361) und Herrn *Prym* (d. Journ., Bd. 73, p. 340) gegen dieselbe geltend gemachten Einwendungen. In welchem Sinne aber, muss man fragen, ist die Behauptung *Riemanns* zu verstehen, welche derselbe am Schlusse des §. 2 seiner Habilitationsschrift („Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe") ausspricht?

$$u(r,\varphi)-u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\varphi+\psi)\left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2}-1\right)d\psi,$$

$$[u(r,\varphi)-u(0)]<\frac{4g}{\pi}\text{ arc sin } r.^{*)}$$

Mai 1870.

Fortsetzung und Erweiterung der in den vorhergehenden Paragraphen enthaltenen Untersuchungen.

§. 7.

Die für die Fläche eines Kreises mit dem Radius 1 erhaltenen Untersuchungsergebnisse sind nach verschiedenen Richtungen einer Erweiterung fähig.

Es ist zunächst klar, dass die aufgestellten Formeln für die Fläche eines Kreises mit dem Radius R Gültigkeit erhalten, wenn in denselben $\frac{r}{R}$ an die Stelle von r gesetzt wird. (Hierbei besitzt R natürlich nicht mehr dieselbe Bedeutung wie in §. 4.)

Hierdurch geht die in §. 4 und §. 5 angegebene Formel in die folgende über

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\psi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}d\psi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}d\psi$$

mit der Bedingung $0\leqq r<R$, und dem Zusatze $u(R,\varphi)=f(\varphi)$.

Die Function $f(\varphi)$ des reellen Argumentes φ ist bisher den Bedingungen endlich, stetig, eindeutig und mit der Periode 2π periodisch zu sein unterworfen gewesen. Die angegebene Formel kann aber für das Innere der Kreisfläche eine bestimmte Bedeutung haben, auch ohne dass

---

*) Wenn insbesondere $u(0)$ den Werth Null hat, so kann der absolute Betrag von $u(r,\varphi)$ als Function von r betrachtet den Werth $\frac{4g}{\pi}$ arc tg r nicht überschreiten. Diese Bestimmung ergiebt zugleich die engste Grenze, welche unter den angegebenen Voraussetzungen zulässig ist.

die Function $f(\varphi)$ für *alle* dem Intervall von 0 bis 2π angehörenden Werthe von φ endlich, stetig und eindeutig erklärt ist, und zwar wird dieses stets und nur dann der Fall sein, wenn diese Function im *Riemann*schen Sinne (§. 5 der Habilitationsschrift) durchgehends eine Integration gestattet.

Die Untersuchung soll jedoch hier nicht in dieser Allgemeinheit geführt, sondern (ebenso wie in der Abhandlung des Herrn *Prym*) auf folgenden Fall beschränkt werden.

Die Function $f(\varphi)$ sei mit Ausnahme derjenigen Werthe von φ, welche modulo 2π einem der m Werthe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\nu, \ldots \varphi_m$ — die sämmtlich kleiner als 2π und von einander verschieden angenommen werden können — congruent sind, für alle reellen Werthe von φ als eine endliche, stetige und eindeutige, bei Vermehrung des Argumentes um 2π periodisch sich wiederholende Function des reellen Argumentes φ erklärt; bei der Annäherung der Variablen φ an einen der ausgeschlossenen Werthe, z. B. an den Werth φ_ν, nähere sich, sowohl wenn φ stetig wachsend, als auch, wenn φ stetig abnehmend dem Werthe φ_ν sich nähert, der Werth der Function $f(\varphi)$ je einer bestimmten endlichen Grenze, welche nach dem Vorgange *Dirichlet*s im ersten Falle mit $f(\varphi_\nu - 0)$, im zweiten mit $f(\varphi_\nu + 0)$ bezeichnet werden soll.

Ist die Differenz $f(\varphi_\nu + 0) - f(\varphi_\nu - 0)$, welche mit A_ν bezeichnet werden möge, eine von Null verschiedene Grösse, so besitzt die Function $f(\varphi)$ für alle Werthe von φ, für welche $\varphi \equiv \varphi_\nu$ (mod. 2π), *zwei* Werthe und erfährt in denselben eine Stetigkeitsunterbrechung. Des Folgenden wegen soll jedoch der Fall nicht ausgeschlossen werden, dass A_ν auch gleich Null sein kann, in welchem Falle der Werth φ_ν und die ihm congruenten mit Rücksicht auf die Stetigkeit der Function $f(\varphi)$ nicht zu den singulären gehören.

Solche Unstetigkeiten, welche durch Abänderung des Werthes der Function in einem Punkte aufgehoben werden können, sogenannte ***hebbare*** Unstetigkeiten, sollen der Kürze wegen hier und im Folgenden von der Betrachtung ausgeschlossen werden.

Dieselbe Unstetigkeit, welche die Function $f(\varphi)$ in den Punkten besitzt, für welche $\varphi \equiv \varphi_\nu$ (mod. 2π), zeigt die Function

$$\frac{A_\nu}{\pi} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_\nu)}\right) = \frac{A_\nu}{2\pi}\,(\pi - (\varphi' - \varphi_\nu)),$$

vorausgesetzt dass A_ν von Null verschieden ist, und dass der Variablen φ' auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung stets der dem Intervalle $\varphi_\nu \ldots \varphi_\nu + 2\pi$ angehörende Werth beigelegt werde, welcher modulo 2π dem Werthe der Variablen φ congruent ist.

Hier und im Folgenden, mit Ausnahme einer Stelle in §. 9, bedeutet die Function arcus tangens den zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegenden eindeutig bestimmten Bogen, dessen Tangente den vorgeschriebenen Werth hat.

Wird nun die Differenz

$$f(\varphi) - \frac{1}{\pi} \Sigma A_\nu \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_\nu)}\right) \quad (\nu = 1, 2, \ldots m)$$

gebildet und mit $f_0(\varphi)$ bezeichnet, so ist durch diese Festsetzung die Function $f_0(\varphi)$ für alle Werthe von φ mit Ausnahme der den Werthen φ_ν congruenten als eine endliche, stetige und eindeutige Function ihres Argumentes erklärt und zwar besteht für alle Werthe von ν die Gleichung

$$f_0(\varphi_\nu - 0) = f_0(\varphi_\nu + 0).$$

Wird daher für diejenigen Werthe von φ, auf welche die Erklärung der Function $f_0(\varphi)$ sich nicht erstreckt, die ergänzende Bestimmung getroffen, es solle, wenn $\varphi \equiv \varphi_\nu$ (mod. 2π), der Werth der Function durch die Gleichung $f_0(\varphi_\nu) = f_0(\varphi_\nu - 0) = f_0(\varphi_\nu + 0)$ bestimmt werden, so genügt die durch diese erweiterte Definition für alle reellen Werthe von φ eindeutig erklärte Function $f_0(\varphi)$ in voller Strenge den in §. 5 angegebenen Bedingungen.

Es werde nun angenommen, für alle Punkte der Fläche S des mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebenen Kreises, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten des Randes, nämlich der Punkte $z_\nu = e^{i\varphi_\nu}$, sei eine reelle Function u der beiden reellen Argumente x und y so erklärt, dass dieselbe für diese Fläche S *mit Ausnahme der angegebenen Punkte des Randes* den in §. 1 angegebenen Bedingungen I genüge und längs des Randes mit Ausnahme der Punkte z_ν mit der Function $f(\varphi)$ übereinstimme.

Dies ist aber so zu verstehen: man denke sich für jeden der singulären Punkte ein Gebiet construirt, welches denselben ganz in seinem Innern enthält, und dessen Begrenzung eine beliebige Gestalt haben darf; am einfachsten ist es, jeden der singulären Punkte als Mittelpunkt einer Kreisfläche mit dem Radius ϱ zu betrachten, wo ϱ eine veränderliche

erklärt ist, genügt dieselbe für die Fläche S den Bedingungen I und hat auf dem Rande von S überall, wo sie erklärt ist, den Werth Null. Es steht daher frei, den Werth von u für den Punkt $z = -1$ durch eine besondere Definition zu fixiren, und zwar möge $u(1, \pi) = 0$ gesetzt werden. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(1, \psi)\, \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\, d\psi$$

für jeden Werth von r und φ gleich Null und stimmt also mit der vorher erklärten Function *nicht* überein. Unter den angegebenen Festsetzungen ist demnach ein Grenzübergang aus dem über die Peripherie des Kreises mit dem Radius R zu erstreckenden Integrale in das über den Rand von S zu erstreckende Integral *nicht* gestattet. Der Grund hiervon liegt in dem Umstande, dass in diesem Falle der Werth von $u(r, \varphi)$ bei der Annäherung des Punktes $z = r.e^{i\varphi}$ an den Punkt $z = -1$ *unendlich gross* oder näher bestimmt, *unendlich gross erster Ordnung* werden kann.

Bei Anwendung des von Herrn *Prym* gewählten Systems von Polarcoordinaten ϱ, τ mit dem Pole $z = -1$ ergiebt sich:

$$z = -1 + i\varrho.e^{-\tau i}$$

und

$$\frac{1-r^2}{1+2r\cos\varphi+r^2} = \Re\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = \Re\left(\frac{2}{1+z}\right) - 1 = \frac{2\sin\tau}{\varrho} - 1.$$

Anders verhält es sich in dem folgenden Falle. Es werde gesetzt

$$u^*(r, \varphi) = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{1+x} = \operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi} = \Re\,\frac{\log(1+z)}{i} = \frac{\pi}{2} - \tau.$$

Das System der Linien, längs welcher u^* constante Werthe hat, ist ein geradliniges Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt im Punkte $z = -1$ liegt. Auch in diesem Falle ist die Function u^* für den Punkt $z = -1$ *nicht erklärt*. Von dem vorhergehenden unterscheidet sich aber der gegenwärtige Fall wesentlich dadurch, dass die Function u^* bei der Annäherung an den singulären Punkt *endlich* bleibt; denn, ein wie kleines den Punkt $z = -1$ enthaltendes Gebiet man auch aus der Fläche S ausscheiden mag, für das übrig bleibende Gebiet genügt die Function u^* den Bedingungen I (sogar den engeren Bedingungen II), und der absolute Betrag von u^* überschreitet nirgends den Werth $\frac{\pi}{2}$.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass für die Function u^* der erwähnte Grenzübergang mit voller Strenge gestattet ist. Um jedoch

dem Beweise gleich eine etwas allgemeinere Fassung zu geben, möge die Grösse, welche der absolute Betrag von u^* nirgends überschreitet, mit g bezeichnet werden.

Es gilt, wenn R dieselbe Bedeutung hat, wie vorher, für alle Werthe von r, welche kleiner als R sind, und für alle Werthe von φ die Gleichung

$$u^*(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^*(R,\psi)\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi.$$

Bei dem Uebergange von R in den Werth 1 hört die Stetigkeit der Function $u^*(R,\psi)$ bei dem Werthe $\psi=\pi$ auf. Man ersetze daher, diese Unstetigkeitsstelle durch das Intervall $\pi-\delta\,\ldots\,\pi+\delta$ ausschliessend, wo δ eine positive Grösse bezeichnet, das Intervall von 0 bis 2π durch zwei andere Intervalle, nämlich durch das Intervall von $-\pi+\delta$ bis $\pi-\delta$ und das Intervall von $\pi-\delta$ bis $\pi+\delta$, welche Ersetzung wegen der Periodicität der Function $u^*(R,\psi)$ als Function von ψ gestattet ist.

Das dem ersten Intervalle entsprechende Integral ist zufolge der Voraussetzung sicher eine stetige Function von R und zwar *einschliesslich* für den Werth $R=1$.

Man kann daher das dem ersten Intervalle entsprechende Integral der Summe

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} u^*(1,\psi)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi + \varepsilon_1$$

gleichsetzen, und zwar bedeutet in dieser Gleichung ε_1 eine Grösse von der Eigenschaft, dass nach vorausgegangener Annahme von δ durch die Festsetzung, die Differenz $1-R$ dürfe eine gewisse Grenze ϱ nicht überschreiten, über die Kleinheit des absoluten Betrages von ε_1 verfügt werden kann.

Da nun die Function u^* zufolge der Voraussetzung an keiner Stelle die Grösse g dem absoluten Betrage nach überschreitet, so kann man setzen

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} u^*(1,\psi)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u^*(1,\psi)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi + \varepsilon_2,$$

wobei für $u^*(1,\pi)$ und $u^*(1,-\pi)$ die Werthe $u^*(1,\pi-0)$ und $u^*(1,-\pi+0)$ einzusetzen sind (die Bezeichnung erläutert die Art des

Grenzüberganges), und wobei ε_2 dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{2g}{1-r}\cdot\delta$ ist.

Der Werth des dem zweiten Intervalle entsprechenden Integrales ist dem absoluten Betrage nach kleiner als $g\cdot\frac{R+r}{R-r}\cdot\delta$ und möge bezeichnet werden mit ε_3.

Hieraus ergiebt sich die Gleichung

$$u^*(r,\varphi)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u^*(1,\psi)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3.$$

Da nun über die Kleinheit des absoluten Betrages von ε_2 und von ε_3, also auch von $\varepsilon_2+\varepsilon_3$ durch gehörig kleine Wahl von δ, und nach getroffener Wahl von δ durch gehörig kleine Wahl von ϱ, beziehungsweise $1-R$, über die Kleinheit des absoluten Betrages von ε_1 verfügt werden kann, und da überdies der Werth der Differenz auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung von der Wahl der Grössen δ und R überhaupt unabhängig ist, so folgt, dass jene Differenz den Werth Null hat. Dieses sollte bewiesen werden.

Dem vorstehenden Beweise ist gleich eine solche Fassung gegeben worden, dass derselbe ohne Schwierigkeit auf den Fall ausgedehnt werden kann, in welchem eine Function u^* für die Fläche S eines Kreises mit dem Radius R mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten des Randes ($z_\nu = R\cdot e^{i\varphi_\nu}$, $\nu=1, 2, \ldots m$) so erklärt ist, dass dieselbe für alle übrigen Punkte den Bedingungen I genügt, wenn ausserdem bekannt ist, dass der Werth von u^* bei der Annäherung des Punktes z an einen der singulären Punkte des Randes stets *endlich* bleibt, d. h. eine bestimmte endliche von dem Grade jener Annäherung unabhängige Grösse g dem absoluten Betrage nach niemals überschreitet.

Die hieraus sich ergebenden Schlüsse sind den in den beiden letzten Absätzen des §. 4 gezogenen völlig analog. Die Function u^* ist also durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt.

Dieser Beweis unterscheidet sich in mehrfacher Beziehung von dem Beweise, den Herr *Prym* in dem §. 5 seiner oben erwähnten Abhandlung gegeben hat, insbesondere dadurch, dass über die *Art* der Unstetigkeit der Function u^*, beziehungsweise deren Vieldeutigkeit bei der Annäherung des Punktes z an einen singulären Punkt des Randes keinerlei andere Voraus-

setzung gemacht wird als die, dass die Function u^* im erklärten Sinne bei der Annäherung an die singulären Punkte *endlich* bleibe.

Auch Herr *C. Neumann* macht (Berichte d. K. Sächs. Ges. d. W. 1870, p. 278 und 279) eine solche *specielle* Voraussetzung.

Jede solche im Voraus gemachte *specielle* Annahme über die *Art* des Verhaltens einer Function $\breve{u}$ bei der Annäherung an einen singulären Punkt unterliegt jedoch, wenn dieselbe mehr enthält als die unerlässliche Forderung, dass die Function bei der Annäherung *endlich* bleibe, wie mir scheint, nicht unerheblichen Bedenken. Sobald nämlich *nur* die Endlichkeit der Function u in der Nähe des singulären Punktes gewiss ist, zeigt sich, dass die gesuchte Function u durch diese und die übrigen Bedingungen *bereits bestimmt* ist, so dass sich also eine vorhergehende speciellere Annahme als *unnöthig* erweist. Ueberhaupt scheint mir das Verhalten einer Function u in der Nähe eines solchen Punktes, wenn deren Endlichkeit in der Umgebung desselben vorausgesetzt wird, Gegenstand der *Untersuchung*, nicht aber Gegenstand der vorhergehenden *freien Verfügung* zu sein, da jede andere specielle Annahme, als diejenige, die die Herren *C. Neumann* und *Prym* gemacht haben, zur Folge haben würde, dass keine Function *existirt*, welche den gestellten Bedingungen genügt.

Dass aber andererseits die Annahme, welche Herr *C. Neumann* gemacht hat, *nicht allgemein genug* ist, zeigt sich, sobald die Begrenzung des Bereiches *T Spitzen* enthält, denn für diese reicht die Annahme des Herrn *C. Neumann* nicht mehr aus, es müsste vielmehr an die Stelle derselben eine Annahme treten, welche mit dem von mir in dem Monatsberichte der Berliner Akademie vom October 1870, p. 777 ausgesprochenen *Lehrsatze* sich in Einklang befindet. —

Durch den vorhergehenden Beweis ist speciell auch die Richtigkeit der Gleichung

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{r \sin\varphi}{1+r\cos\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2}\,\psi \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\cdot d\psi$$

für alle Werthe von r, welche kleiner als 1 sind, bewiesen, eine Gleichung, welche übrigens leicht auch auf anderem Wege vermittelst Reihenentwickelungen erhalten werden kann.

Wird nun in dieser Gleichung die Variable φ mit $\pi-(\varphi-\varphi_\nu)$ vertauscht und die Function, in welche der Ausdruck auf der linken Seite hierdurch übergeht, mir u_ν^* bezeichnet, so ergiebt sich

$$u_\nu^* = \operatorname{arc\,tg} \frac{r \sin(\varphi - \varphi_\nu)}{1 - r\cos(\varphi-\varphi_\nu)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2}\psi \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\pi+\varphi-\varphi_\nu)+r^2}\,d\psi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\psi-\varphi_\nu)}\right)\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi,$$

eine Gleichung, von welcher im folgenden Paragraphen Gebrauch gemacht werden wird.

§. 8.

Es handelt sich nun darum, analog der in §. 5 durchgeführten Untersuchung den Existenzbeweis zu führen, und das Verhalten des die gesuchte Function darstellenden Integrals in der Nähe der singulären Punkte $z_\nu = e^{i\varphi_\nu}$ zu untersuchen, in welchen entweder die Reihe der vorgeschriebenen Randwerthe eine Stetigkeitsunterbrechung erfährt, oder die Stetigkeit der Function u^* ungewiss ist.

Die Untersuchung lässt sich leicht auf den in §. 5 betrachteten Fall zurückführen. Unter Beibehaltung der übrigen in §. 7 erklärten Bezeichnungen möge die Function $u^*(r,\varphi)$ für alle Werthe von r, welche kleiner als 1 sind, durch die Gleichung

$$u^*(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi$$

und für $r=1$ durch die Gleichung $u^*(1,\varphi)=f(\varphi)$, soweit diese nämlich einen bestimmten Sinn hat, erklärt sein.

Für jeden ganz im Innern von S liegenden Bereich genügt diese Function (vergl. den Beweis in §. 5 unter *a.*) den Bedingungen II, es handelt sich also nur darum, das Verhalten der Function für $\lim r = 1$ zu untersuchen.

Zu diesem Zwecke werde an die Stelle von $f(\psi)$ die Summe

$$f(\psi) = f_0(\psi) + \frac{1}{\pi}\Sigma A_\nu \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\psi-\varphi_\nu)}\right) \quad (\nu = 1, 2, \dots m)$$

(s. den vorhergehenden Paragraphen) gesetzt; hierdurch geht der Ausdruck für $u^*(r,\varphi)$ in eine Summe von $m+1$ ebenso gebildeten Integralen über. Bezeichnet man nun das dem ersten Gliede $f_0(\psi)$ entsprechende Integral, welches sich ganz im Falle des in §. 5 betrachteten befindet, mit $u_0(r,\varphi)$

oder mit u_0, die übrigen dagegen zufolge der letzten Gleichung in §. 7, so ergiebt sich

$$u^* = u_0 + \frac{1}{\pi}\Sigma A_\nu . u_\nu^* \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots\ m).$$

Durch diese Darstellung ist die Stetigkeit der analytisch dargestellten Function u^* längs des Randes mit Ausnahme der Umgebung der singulären Punkte $z_\nu = e^{i\varphi_\nu}$ bewiesen und gleichzeitig die Art des Verhaltens dieser Function in der Umgebung dieser Punkte charakterisirt. In der Umgebung eines singulären Punktes $z_\nu = e^{i\varphi_\nu}$ unterscheidet sich nämlich die Function u^* von der Function $\frac{1}{\pi} A_\nu . u_\nu^*$ nur durch eine in diesem Punkte vollkommen stetige Function.

Hiermit ist also die Existenz einer den angegebenen Bedingungen genügenden Function dargethan, und zwar hat sich hierbei ergeben, dass die besondere Art ihres Verhaltens in der Nähe der singulären Punkte in dem betrachteten Falle eine *Folge* der übrigen Eigenschaften ist.

Die dargestellte Function genügt also für das Gebiet, für welches sie erklärt ist, mit Ausnahme derjenigen singulären Punkte $z_\nu = e^{i\varphi_\nu}$ des Randes, für welche das entsprechende A_ν von Null verschieden ist, im angegebenen Sinne den Bedingungen I, stimmt für alle Punkte des Randes mit Ausnahme der erwähnten singulären mit der gegebenen Function $f(\varphi)$ überein und bleibt zugleich bei der Annäherung an jene singulären Punkte *endlich.*

Der hier mitgetheilte Beweis, der übrigens ebensowenig wie der im vorhergehenden Paragraphen vorgetragene darauf Anspruch macht, neue Gedanken zu enthalten, scheint mir etwas einfacher zu sein als derjenige, dessen Herr *Prym* in seiner mehrfach erwähnten Abhandlung sich bedient hat.

Wird nun die Voraussetzung gemacht, dass A_ν für einen speciellen Werth von ν gleich Null sei, so liegt in dem Vorhergehenden bereits zugleich der Beweis dafür, dass die einzige, den übrigen Bedingungen genügende Function in der Umgebung des Punktes z_ν *ebenfalls stetig* ist, während bei der Herleitung (s. §. 7) die Stetigkeit in diesem Punkte ungewiss gelassen und nur festgesetzt war, dass die Function in der Umgebung dieses Punktes *endlich* bleiben solle.*)

*) Es kann erwähnt werden, dass dieser Satz sich folgendermassen verallgemei-

Es gilt auch hier die Bemerkung, dass, wenn an die Stelle der Kreisfläche mit dem Radius 1 eine solche tritt, deren Radius R ist, dann in der aufgestellten Formel $\frac{r}{R}$ an die Stelle von r zu setzen ist.

Bezeichnet nun g die *obere*, k die *untere Grenze* aller derjenigen Werthe, welche die Function $f(\varphi)$ annehmen kann, von der vorausgesetzt werden möge, dass sie nicht constant sei, so ist von den Differenzen $f(\varphi)-g$ und $f(\varphi)-k$ die erste nie positiv, die zweite nie negativ. Hieraus folgt, dass von den beiden Differenzen $u(r,\varphi)-g$ und $u(r,\varphi)-k$, wenn $r<1$ ist, die erste nur negative, die zweite nur positive Werthe annehmen kann, da diese Differenzen beziehlich mit den Integralen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(f(\psi)-g\Big)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\cdot d\psi$$

und

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(f(\psi)-k\Big)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\cdot d\psi$$

übereinstimmen.

Es liegt daher der Werth von u für einen *inneren* Punkt von S stets *zwischen* g und k, d. h. dem Werthe der oberen und unteren Grenze aller derjenigen Werthe, welche diese Function längs des Randes von S annehmen kann.

§. 9.

Den Inhalt dieses und des folgenden Paragraphen entnehme ich

---

nern lässt: Wenn für irgend einen von einer endlichen Anzahl analytischer Linien begrenzten Bereich T mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten im Innern oder auf dem Rande eine Function u so erklärt ist, dass dieselbe

1. für den Bereich T mit Ausnahme jener Punkte, für welche es ungewiss oder noch unentschieden ist, im angegebenen Sinne den Bedingungen I genügt,

2. bei der Annäherung an jene Punkte endlich bleibt,

während

3. hebbare Unstetigkeiten ausgeschlossen bleiben,

so ist diese Function eo ipso auch für alle inneren Punkte und für diejenigen Punkte des Randes stetig, in welchen die Reihe der Randwerthe eine Stetigkeitsunterbrechung nicht erfährt.

Auf den strengen Beweis dieses Satzes kann ich jedoch, soweit sich derselbe auf solche singulären Punkte bezieht, die am Rande liegen, in dieser Mittheilung nicht eingehen, da derselbe mich hier zu weit vom nächsten Zwecke entfernen würde, und ich muss mich daher damit begnügen, hinsichtlich dieses Beweises einstweilen auf die in dem Monatsberichte der Berliner Akademie vom October 1870, pag. 775—777 gegebenen Andeutungen zu verweisen.

einer Abhandlung über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\triangle u=0$, welche ich im November 1869 Herrn *Kronecker* und Herrn *Weierstrass* mitgetheilt habe. Der zunächst befolgte Gedankengang ist demjenigen, welchen *Riemann* im 54. Bande dieses Journals auf p. 101 und 102 (p. 1 und 2 des Separatabdruckes) entwickelt hat, und der, wie bekannt, in der Theorie der analytischen Functionen häufig zur Anwendung gelangt, vollkommen entsprechend. Es freut mich, constatiren zu können, dass ich mich in diesem Theile der Untersuchung hinsichtlich der Methode der Beweisführung mit Herrn *C. Neumann* ganz in Uebereinstimmung befinde. Man vergl. Mathematische Annalen von *Clebsch* und *Neumann*, Bd. 3, p. 338—339 (October 1870) und Monatsbericht der Berliner Akademie vom October 1870, p. 770—771. —

Unter den Bedingungen I sei für den Bereich T eine Function u definirt; im Innern von T denke man sich einen Kreis, dessen Mittelpunkt die Coordinaten x_0 und y_0 haben möge, dessen Radius gleich R ist und dessen ganze Fläche dem Innern von T angehört.

Für die Fläche dieses Kreises ist die Function u mit den Bedingungen II erklärt, es ist also nach dem Vorhergehenden die Existenz höherer Ableitungen von u für alle inneren Punkte x_0, y_0 des Gebietes T, sowie die Entwickelbarkeit des Werthes von u für die dem Punkte x_0, y_0 benachbarten Punkte x, y nach Potenzen von $x-x_0$ und $y-y_0$ beziehungsweise nach Producten aus Potenzen von $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ und den Sinus und Cosinus der gleichnamigen Vielfachen von $\varphi=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{y-y_0}{x-x_0}$ eine nothwendige Folge der Voraussetzungen I.

Die Zahlencoefficienten der einzelnen Glieder des Functionenelementes $u(r, \varphi)$, welches die Werthe von u für alle in der Umgebung des Punktes x_0, y_0 liegenden Punkte darstellt, sind unabhängig von der Grösse des Radius R desjenigen Kreises, welcher zur Bestimmung dieses Functionenelementes gewählt wird; denn zwei Functionenelemente, hergeleitet mittelst zweier Kreise, welche die Radien R und R' haben, wo $R'>R$, müssen für alle Werthe von $r<R$ mit einander übereinstimmen und hieraus folgt die Gleichheit aller entsprechenden Glieder beider Elemente. Es haben daher auch beide Elemente denselben Bereich der Convergenz.

Daher convergirt die nach Potenzen von r fortschreitende Reihe, durch welche ein solches Functionenelement dargestellt wird, sicher, wenn

r kleiner ist als der kürzeste Abstand des Punktes x_0, y_0 von der Begrenzung des Bereiches T, beziehlich vom nächsten Punkte, für welchen die gestellten Bedingungen zu gelten aufhören.

Hieraus wird gefolgert: Wenn zwei Functionen u_1 und u_2, welche für zwei Bereiche T_1 und T_2, die ein einfach zusammenhängendes Gebiet T^* von zwei Dimensionen gemeinsam haben, den Bedingungen I genügen, in einem noch so kleinen Theile dieses gemeinsamen Gebietes mit einander übereinstimmen, so stimmen sie für alle Punkte desselben mit einander überein, lassen sich unter Beibehaltung der Bedingungen I beide simultan gleich weit analytisch fortsetzen und stimmen längs jeder solchen Fortsetzung mit einander überein.

Um diesen Schluss machen zu können, ist nach dem Vorhergehenden nur nöthig zu wissen, die beiden Functionen stimmen auf der Peripherie eines Kreises mit einander überein, für dessen Fläche beide mit den Bedingungen I erklärt sind.

Wenn daher eine Function u im Innern von T in einem noch so kleinen Bereiche von zwei Dimensionen oder auf der Peripherie eines Kreises mit beliebig kleinem Radius, dessen Inneres ganz im Innern von T liegt, für welches Gebiet die Function u den Bedingungen I genügt, *constant* ist, so ist diese Function, soweit sie unter Aufrechterhaltung der Bedingungen I fortgesetzt wird, constant.

§. 10.

Der Werth $u(0)$ von u für den Mittelpunkt eines Kreises, für dessen Fläche u mit den Bedingungen I erklärt ist, ist gleich dem über die Peripherie des Kreises zu erstreckenden Integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,.\,d\varphi,$$

also gleich dem arithmetischen Mittel aus allen den Werthen, welche u auf der Peripherie des Kreises annimmt. Wenn nun u nicht überhaupt constant ist, so muss es unter den Werthen von u auf der Peripherie des Kreises sowohl solche geben, welche grösser sind als der Werth $u(0)$, als auch solche, die kleiner sind, und zwar gilt dieser Schluss, wie klein auch der Radius des Kreises sein möge.

Hieraus folgt, wenn u nicht constant ist, so giebt es für jeden inne-

ren Punkt von T solche benachbarten Punkte, für welche u einen grösseren, und solche, für welche u einen kleineren Werth besitzt als für den erstbetrachteten Punkt. -

Es kann also u für keinen inneren Punkt des Gebietes ein Maximum oder Minimum sein. (Vergl. *Riemanns* Inauguraldissertation, Art. 11. III.)

Nun ist nach den Voraussetzungen I der Werth von u endlich, stetig und eindeutig erklärt für alle Punkte von T, einschliesslich der Begrenzung. Folglich giebt es für diese Werthe eine *obere Grenze* g.

Nach einer Beweismethode, welche Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen über die Theorie der analytischen Functionen mitzutheilen pflegt, lässt sich zeigen, dass es in der Ebene des Gebietes T mindestens einen Punkt z' von der Beschaffenheit giebt, dass, wenn ein beliebig kleines Gebiet, ein Theil von T, in der Umgebung desselben abgegrenzt wird, die *obere Grenze* aller derjenigen Werthe von u, die zu Punkten dieses Gebietes gehören, *ebenfalls* noch g ist.

Keiner dieser Punkte kann im Innern von T liegen, denn erstens würde in einem solchen Punkte wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von u die obere Grenze g wirklich *erreicht*, zweitens müsste es dann — wenn u nicht überhaupt constant ist — in der Umgebung jenes Punktes noch grössere Werthe von u geben, gegen die Voraussetzung, dass g die obere Grenze ist.

Es liegen also alle jene Punkte z' *ausserhalb* des Innern von T.

Da die Begrenzung von T nach der Voraussetzung aus Stücken analytischer Linien besteht, welche in jedem Punkte den Charakter einer algebraischen Curve haben, und eine solche Linie jeden Punkt der Ebene, dem sie unendlich nahe kommt, wirklich erreicht, so liegt jeder der Punkte z' *in* der Begrenzung von T und wegen der Stetigkeit von u wird die obere Grenze g in jedem dieser Punkte z' wirklich *erreicht*.

In analoger Weise wird gezeigt, dass die *untere Grenze* k aller Werthe von u mindestens in einem Punkte der Begrenzung, aber in keinem inneren Punkte von T wirklich erreicht wird.

Also liegen, wenn u nicht constant ist, alle Werthe, welche u für die inneren Punkte des Bereiches T unter den angegebenen Voraussetzungen I annehmen kann, *zwischen* dem grössten Werthe g und dem kleinsten Werthe k unter denjenigen Werthen, welche u auf der Begrenzung von T annimmt.

Hieraus folgt, dass eine Function u, welche unter den Bedingungen I für einen Bereich T erklärt ist und für alle Punkte der Begrenzung den Werth Null hat, auch für alle inneren Punkte von T den Werth Null hat.

Und:

Wenn zwei Functionen u und u_1 für dasselbe Gebiet T den Bedingungen I genügen und für alle Punkte der Begrenzung des Gebietes mit einander übereinstimmen, so stimmen sie in ihren Werthen ganz mit einander überein.

Wenn es daher eine Function u giebt, welche für einen gegebenen Bereich T den Bedingungen I genügt, und in jedem Punkte der Begrenzung einen vorgeschriebenen und längs derselben stetig sich ändernden Werth besitzt, so giebt es nur *eine* solche Function.*)

§. 11.

Wenn die Integration der partiellen Differentialgleichung $\triangle u = 0$ für die Fläche eines Kreises durchgeführt ist, hat es keine Schwierigkeit, die analogen Untersuchungen für den Fall eines von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Ringgebietes denselben Anforderungen der Strenge entsprechend auszuführen.

Es seien $r = 1$ und $r = R$, wo $R > 1$ sein möge, die Radien der das Ringgebiet begrenzenden concentrischen Kreise, und es seien die Grenzbedingungen der Einfachheit wegen $u(R, \varphi) = f(\varphi)$, $u(1, \varphi) = 0$, auf welchen Fall bekanntlich der allgemeinere leicht zurückgeführt werden kann. Die Function $f(\varphi)$ habe dieselben Eigenschaften wie in §. 7.

Für diesen Fall ergiebt sich nach den bekannten Methoden (vergl. die schon in §. 4 citirte Abhandlung des Herrn *C. Neumann*, dieses Journal, Bd. 59.):

---

*) Die in diesem Paragraphen enthaltenen Sätze lassen eine solche Verallgemeinerung zu, dass sie auch noch den Fall umfassen, in welchem die Stetigkeit der Function u für eine endliche Anzahl von Punkten des Bereiches T entweder aufhört oder ungewiss ist, vorausgesetzt, dass die Function u bei der Annäherung an diese Punkte endlich bleibt, und ohne dass es nöthig ist, über das Verhalten der Function u in der Nähe der singulären Punkte eine *specielle* Voraussetzung zu machen. Man vergl. §. 8.

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2}\, b_0 \cdot \frac{\log r}{\log R} + \Sigma \frac{r^m - r^{-m}}{R^m - R^{-m}} \cdot (a_m \sin m\varphi + b_m \cos m\varphi) \quad (m=1, \ldots \infty),$$

wo a_m und b_m durch die Gleichungen

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi) \sin m\psi \,.\, d\psi, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi) \cos m\psi \,.\, d\psi$$

definirt sind.

Diese Reihe ist für $\frac{1}{R} < r < R$ unbedingt und in gleichem Grade convergent, und die durch diese Reihe dargestellte Function genügt, als Function von x und y betrachtet, für das Innere des Bereiches, für welchen sie erklärt ist, der Differentialgleichung $\Delta u = 0$. Da die Kreislinie $r=1$ *im Innern* des Convergenzgebietes liegt, so folgt die Stetigkeit der Function in der Nähe des Werthes $r=1$ aus den bekannten Sätzen über die Stetigkeit von Potenzreihen im Innern ihres Convergenzbereiches. Für $r=1$ ist in der That $u(r,\varphi) = 0$.

Es bleibt also nur noch übrig zu beweisen, dass diese Function für $\lim r = R$ mit Ausnahme derjenigen Punkte, in denen die vorgeschriebenen Randwerthe eine Stetigkeitsunterbrechung erfahren, stetig in die Function $f(\varphi)$ übergeht.

Zu diesem Zwecke subtrahire man von der Function $u(r,\varphi)$ die Function

$$u_1(r,\varphi) = \frac{1}{2}\, b_0 + \Sigma \frac{r^m}{R^m} (a_m \sin m\varphi + b_m \cos m\varphi) \quad (m=1, 2, \ldots \infty),$$

welche (vergl. §. 6) für $r < R$ mit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2} \cdot d\psi$$

übereinstimmt, und deren Stetigkeit aus dem Beweise in §. 8 in dem dort angegebenen Umfange folgt, so zeigt sich, dass der Convergenzbereich der Potenzreihe, welche mit Hinzunahme eines Gliedes, das dem Logarithmus von r proportional ist, die Differenz $u - u_1$ darstellt, *weiter* ist als derjenige Bereich, für welchen die in den Ausdrücken für u und für u_1 vorkommenden Potenzreihen gleichzeitig convergiren, da dieser Convergenzbereich sich von $r = \frac{1}{R}$ bis zu $r = R^3$ erstreckt (excl. der Grenzen). Da hiernach die Kreislinie $r=R$ nicht mehr an der Grenze, sondern *innerhalb* des Convergenzgebietes der Reihe für den Ausdruck

$$u - u_1 - \frac{1}{2} b_0 \frac{\log r}{\log R}$$

liegt, so folgt hieraus die Stetigkeit dieser Function in der Umgebung von $r = R$; überdies ergiebt sich, dass die Function $u - u_1$ für $r = R$ den Werth Null hat.

Es genügt daher die dargestellte Function den gestellten Bedingungen. Dieselbe ist zugleich die einzige, welche diese Eigenschaft besitzt. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich für den Fall, in welchem die Function u für alle Punkte des betrachteten Gebietes den Bedingungen I genügt, aus §. 10.

§. 12.

An die in den Paragraphen 9 und 11 enthaltenen Entwickelungen können nun leicht Betrachtungen angeschlossen werden, welche denjenigen, die in der Theorie der Functionen complexen Arguments mit dem *Cauchy*schen und dem *Laurent*schen Satze über die Entwickelbarkeit einer Function in eine nach Potenzen der unabhängigen Variablen fortschreitende Reihe verbunden werden und für diese Theorie fundamentale Bedeutung haben, in vieler Beziehung analog sind.

Wenn eine Function u für das Innere eines beliebig grossen um den Nullpunkt mit dem Radius R beschriebenen Kreises den Bedingungen I gemäss erklärt werden kann, so ist dieselbe für jeden beliebig grossen Bereich durch eine für alle endlichen Werthe von x und y convergirende Reihe darstellbar.

Wenn nun überdies bekannt ist, dass dabei der Werth von u, wie gross auch R sein möge, dem absoluten Betrage nach kleiner bleibt als eine endliche (von R unabhängige) Grösse g, so ist u eine Constante.

Wird nämlich der Grösse r ein bestimmter endlicher Werth beigelegt und ist R grösser als r, so ergiebt sich:

$$u(r, \varphi) - u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \psi) \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi) + r^2} - 1 \right) d\psi.$$

Da nun sämmtliche Elemente dieses Integrals dem absoluten Betrage nach kleiner sind als $g \cdot \frac{2r}{R-r} \cdot d\psi$, so ist der absolute Betrag von $u(r, \varphi) - u(0)$

für alle Werthe von φ kleiner als $2g \cdot \frac{r}{R-r}$. Hieraus ergiebt sich, dass diese Differenz für unendlich grosse Werthe von R unendlich klein wird; da dieselbe jedoch von dem Werthe von R ganz unabhängig ist, so folgt, dass sie den Werth Null hat. Aus §. 9 folgt daher, dass die Function u unter den angegebenen Voraussetzungen überhaupt für alle Punkte der Ebene denselben constanten Werth $u(0)$ besitzt. Dieser Satz ist als ein Fundamentalsatz zu betrachten und ist dem entsprechenden Satze in der Theorie der Functionen complexen Arguments analog, den bekanntlich Herr *Liouville* zuerst für doppelt periodische Functionen ausgesprochen hat. (Comptes rendus 1844, 2me Semestre, pag. 1262.)

Wenn hingegen unter übrigens unveränderten Voraussetzungen nur bekannt ist, dass das Product $R^{-\mu} . u(R, \varphi)$ für unendlich grosse Werthe von R endlich bleibt, wo μ eine positive Zahl und n die nächst *grössere* ganze Zahl bezeichnet, so ist in analoger Weise zu schliessen, dass die Reihe für die Function $u(r, \varphi)$ nur n Glieder hat:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2} b_0 + \Sigma r^m (a_m \sin m\varphi + b_m \cos m\varphi) \quad (m = 1, 2, \ldots n-1),$$

dass also in diesem Falle die Function u als Function von x und y betrachtet eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist.

Aus §. 11 folgt: Wenn eine Function $u(r, \varphi)$ für ein von zwei concentrischen Kreisen mit den Radien $r = R_1$ und $r = R_2$, $R_2 < R_1$ begrenztes Ringgebiet T den Bedingungen I in §. 1 genügt und für die Punkte der Begrenzung $z = R_1 . e^{i\varphi}$ und $z = R_2 . e^{i\varphi}$ für jeden Werth von φ beziehlich mit den Functionen $f_1(\varphi)$ und $f_2(\varphi)$ übereinstimmt, so ist diese Function durch diese Bedingungen bestimmt, und es giebt, wenn die Functionen $f_1(\varphi)$ und $f_2(\varphi)$ den in §. 5 für die Function $f(\varphi)$ angegebenen Bedingungen genügen, stets eine solche Function.

Diese Function wird für alle Werthe von r, für welche $R_2 < r < R_1$ ist, analytisch dargestellt durch die Gleichung

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2} B_0 + B'_0 . \log r$$

$$+ \Sigma \left\{ (A_m r^m + A_{-m} r^{-m}) \sin m\varphi + (B_m r^m + B_{-m} r^{-m}) \cos m\varphi \right\} \quad (m = 1, 2, \ldots \infty),$$

und zwar haben die in derselben vorkommenden Coefficienten A und B die Werthe

$$B_0 = \frac{b_{20}\log R_1 - b_{10}\log R_2}{\log R_1 - \log R_2}, \qquad B'_0 = \frac{b_{10} - b_{20}}{\log R_1 - \log R_2},$$

$$A_m = \frac{a_{1m}R_1^m - a_{2m}R_2^m}{R_1^{2m} - R_2^{2m}}, \qquad B_m = \frac{b_{1m}R_1^m - b_{2m}R_2^m}{R_1^{2m} - R_2^{2m}},$$

$$A_{-m} = \frac{a_{1m}R_1^{-m} - a_{2m}R_2^{-m}}{R_1^{-2m} - R_2^{-2m}}, \qquad B_{-m} = \frac{b_{1m}R_1^{-m} - b_{2m}R_2^{-m}}{R_1^{-2m} - R_2^{-2m}},$$

wenn in diesen Ausdrücken

$$\left.\begin{matrix} a_{\lambda m} \\ b_{\lambda m} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R_\lambda, \psi) \begin{Bmatrix} \sin m\psi \\ \cos m\psi \end{Bmatrix} d\psi, \quad u(R_\lambda, \psi) = f_\lambda(\psi), \quad \begin{matrix} (m = 0, 1, \ldots \infty) \\ (\lambda = 1, 2) \end{matrix}$$

gesetzt wird.

Die angegebene Reihe convergirt unbedingt, wenn $R_2 < r < R_1$ ist. Es ist wichtig zu bemerken, dass eine Function $u(r, \varphi)$ für denselben Bereich nur auf eine einzige Weise durch einen Ausdruck von der angegebenen Form dargestellt werden kann. Für jeden Werth von r, für den $R_2 < r < R_1$ ist, ergeben sich nämlich, wenn der obige Ausdruck für $u(r, \varphi)$ zu Grunde gelegt wird, die Gleichungen

$$\int_0^{2\pi} u(r, \varphi)\, d\varphi = (B_0 + B'_0 \log r)\pi$$

und

$$\int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} d\varphi = \begin{Bmatrix} A_m r^m + A_{-m} r^{-m} \\ B_m r^m + B_{-m} r^{-m} \end{Bmatrix} \cdot \pi,$$

da unter den angegebenen Voraussetzungen die Integration an den einzelnen Gliedern ausgeführt werden darf. Werden nun in diesen Gleichungen der Grösse r zwei von einander verschiedene Werthe R'_1 und R'_2 beigelegt, für welche $R_2 < R'_2 < R'_1 < R_1$ ist, und werden die Ausdrücke, in welche $a_{\lambda m}$ und $b_{\lambda m}$ übergehen, wenn R'_λ an die Stelle von R_λ gesetzt wird, beziehlich mit $a'_{\lambda m}$ und $b'_{\lambda m}$ bezeichnet, wobei dem Index λ wie vorhin der Werth 1 und der Werth 2 beizulegen ist, so ergeben sich hieraus die Werthe der Coefficienten A und B *eindeutig* ausgedrückt durch die Grössen

a', b', R_1' und R_2'. Die so erhaltenen Ausdrücke haben dieselbe Form wie die oben angegebenen, in welche dieselben bei dem Grenzübergange

$$\lim R_1' = R_1, \ \lim R_2' = R_2$$

übergehen.

Hieraus wird analog wie in §. 9 geschlossen: Wenn die Function u, beziehungsweise deren analytische Fortsetzung nicht bloss für den Bereich

$$R_2 \leqq r \lesseqgtr R_1,$$

sondern für einen noch weiteren Bereich

$$R_2'' \leqq r \lesseqgtr R_1',$$

der jenen ersten als Theil enthält, den Bedingungen I genügt, so convergirt die gefundene Reihe, welche zur analytischen Darstellung der Function u innerhalb des engeren Bereiches dient, auch noch für das Innere des weiteren Bereiches und die Summe derselben stimmt mit der Function u oder der analytischen Fortsetzung derselben auch in dem weiteren Bereiche überein.

Wenn daher eine Function u für das Innere einer Kreisfläche S mit dem Radius R_1 mit einziger Ausnahme von deren Mittelpunkt $z=0$, für den es noch ungewiss ist, den Bedingungen I genügt, so ist diese Function darstellbar durch einen Ausdruck von der soeben angegebenen Form, und zwar convergirt die in demselben vorkommende Reihe für alle Werthe von r, welche kleiner als R_1 und von Null verschieden sind.

Wenn nun von dem Verhalten der Function u in der Nähe des singulären Punktes $z=0$ weiter nichts bekannt ist, als dass dieselbe bei der Annäherung an denselben in dem in §. 7 angegebenen Sinne *endlich* bleibt, so kann geschlossen werden, dass die Coefficienten B_0', A_{-m}, B_{-m} einzeln den Werth Null haben, und zwar folgt dies aus dem Bildungsgesetze für diese Grössen, da bei dem Grenzübergange $\lim R_2 = 0$ die Grössen a_{2m} und b_{2m} unter der angegebenen Voraussetzung endlich bleiben.

Es ist daher, wenn der Werth der Function u auch für den Punkt $z=0$ durch den Werth der Reihe erklärt wird, die Function u unter den angegebenen Bedingungen auch in der Umgebung des Punktes $z=0$ stetig und genügt mit Einschluss dieses Punktes für die Fläche S den Bedingungen I.

Man vergl. hiermit *Riemanns* Dissertation, Art. 12.

Tritt an die Stelle der Bedingung

$$\left[u(r, \varphi)\right] < g$$

die Bedingung

$$r^{\mu} . \left[u(r, \varphi)\right] < g,$$

wo μ eine positive Zahl bedeutet, so folgt durch analoge Schlüsse, dass der Ausdruck für die Function u ausser anderen Gliedern jedenfalls nur eine endliche Anzahl solcher Glieder enthält, in denen r zu einer Potenz mit *negativem* Exponenten erhoben ist.

Zürich, im September 1871.*)

---

*) Nach der Einsendung des Textes der obigen Mittheilung und der denselben begleitenden Anmerkungen an den Herrn Herausgeber dieses Journals ist eine Mittheilung des Herrn *Christoffel*: „Ueber die Integration von partiellen Differentialgleichungen" veröffentlicht worden, welche in Nr. 18 der Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vom 13. September 1871, pag. 435—453 abgedruckt ist.

In dem Inhalte dieser Mittheilung erblicke ich eine Bestätigung für die Auffassung dass der früher übliche Nachweis der Stetigkeit der durch das *Poisson*sche Integral oder eine gleichgeltende Formel dargestellten Function in der Nähe des Randes den Anforderungen der Strenge nicht vollkommen entspreche, welche in Folge der in Bd. 71 d. Journ. veröffentlichten Bemerkung des Herrn *Heine*, wie mir scheint, gestellt werden müssen.

Ferner dürfte bezüglich einer auf pag. 445 derselben Mittheilung enthaltenen Bemerkung: „Endlich gehört hierhin die Voraussetzung, dass v zweite Derivirten habe, was, wenn $u + iv$ als Function von $x + iy$ definirt wird, nicht gefordert ist und eine Folge aus weniger weit gehenden Bedingungen ist" geltend zu machen sein, dass *Riemann* im Art. 12 seiner Inauguraldissertation die Ergebnisse der im Art. 10 derselben angestellten Untersuchung zunächst nicht auf die Bestandtheile u und iv der als Function des complexen Arguments $x + iy$ definirten Function $u + iv$, sondern auf den reellen Theil $U = \int (udx - vdy)$ der aus jener durch Integration hervorgehenden Function $\int (u + iv)(dx + idy)$ anwendet, und dass für diesen die oben als Bedingungen I bezeichneten Voraussetzungen erfüllt sind. Als eine Folge des im Art. 10 der Inaugural-Dissertation bewiesenen Lehrsatzes ergiebt sich dann, dass auch die Functionen $\frac{\partial U}{\partial x} = u$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -v$ für das Innere des betrachteten Gebietes partielle Ableitungen aller Ordnungen besitzen und der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügen. Hieraus scheint mir aber hervorzugehen, dass die beiden Voraussetzungen „es ist $\Delta u = 0$" und „es ist $\frac{\partial u}{\partial y} . dx - \frac{\partial u}{\partial x} . dy$ ein vollständiges Differential einer Function von x und y" mit Rücksicht auf den vorliegenden Zweck vollkommen äquivalent sind.

März 1872.

Ueber die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen, deren Coefficienten rationale Functionen einer Variablen sind.

(Von Herrn *G. Frobenius.*)

Ein grosser Theil der Untersuchungen über die Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen durch Wurzelgrössen beschäftigt sich nicht sowohl mit der Werthbestimmung der einzelnen Wurzeln als mit der Ermittelung ihrer gegenseitigen Beziehungen. Dazu sind alle Betrachtungen zu rechnen, welche sich auf den Begriff der Irreductibilität und die Lehre von den Substitutionen stützen, während diejenigen davon auszuschliessen sind, welche von der Auflösungsmethode der Gleichungen mittelst der *Lagrange*schen Resolvente Gebrauch machen. Die bezeichneten algebraischen Untersuchungen haben eine grosse Aehnlichkeit mit den analytischen Betrachtungen, bei denen die Grössen als nicht unabhängig von der Lage existirend angesehen werden, und diese Bemerkung legt den Gedanken nahe, jene abstracte Theorie möchte in dem besonderen Falle, wo die Coefficienten der Gleichung rationale Functionen einer Variablen sind, an Fasslichkeit und Anschaulichkeit dadurch gewinnen, dass sie in das der Analysis so bequeme geometrische Gewand eingekleidet würde. Der Ausführung des eben genannten Gedankens, auf den ich durch Betrachtungen über die durch algebraische Functionen integrirbaren linearen Differentialgleichungen geführt wurde, sind die folgenden Zeilen gewidmet, die nicht neue Resultate bringen, sondern nur eine bekannte Lehre von einer neuen Seite beleuchten wollen.

Je ausschliesslicher man bei diesen Untersuchungen auf die Ortsverhältnisse der betrachteten Grössen sein Augenmerk richtet, um so geringer sind die Hülfsmittel, mit denen man zum Ziele gelangt. Eine Probe, wie weit man dabei von Massverhältnissen absehen, und mit wie wenigen Vorbereitungen man auskommen kann, ist in §. 1 gegeben, wo sofort zur Ermittelung der von *Galois* entdeckten Relation zwischen den Wurzeln der

auflösbaren Gleichungen von einem Primzahlgrade geschritten wird. Die folgenden Paragraphen enthalten fast nur die Zergliederung der im ersten angewandten Methode in ihre einzelnen Momente und die Uebersetzung der dort gebrauchten geometrischen Ausdrücke in die Sprache der Algebra und erfordern namentlich zur Erreichung des letzteren Zwecks die Kenntniss der in §. 3 entwickelten Hülfssätze aus der Analysis.

§. 1.

Unter einer durch Wurzelgrössen ausdrückbaren algebraischen Function y der unbeschränkt Veränderlichen x, deren Werthe wir uns durch die Punkte einer unbegrenzten Ebene repräsentirt denken, verstehen wir eine Grösse, die aus der Variablen und mehreren Constanten durch die in endlicher Anzahl angewandten Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Ausziehung von Wurzeln mit Primzahlexponenten gebildet ist. Die Stellen, an denen die Function unendlich gross wird, oder zwei im Allgemeinen verschiedene Werthe derselben einander gleich werden, sollen *singuläre* Stellen genannt und ein für alle Mal von dem Bereiche der Variablen ausgeschlossen werden. Wird dann für einen bestimmten Werth a von x über die Werthe der Wurzeln, welche zur Berechnung von y ausgezogen werden müssen, eine beliebige Festsetzung getroffen, und wird ferner eine stetige Aenderung der Function mit der Variablen postulirt, so erhält die Function sammt allen in ihrem Ausdrucke vorkommenden Wurzeln in jedem Punkte der Ebene einen Werth, der eindeutig definirt ist, wenn der Weg gegeben ist, auf dem die Variable von dem Anfangspunkte a ausgehend zu jenem Punkte gelangt. Beschreibt also x von a aus eine geschlossene Strecke, so geht der Anfangswerth y_0 von y in einen ganz bestimmten anderen Werth dieser Function über, und die Anzahl der Werthe, welche y so für $x=a$ annehmen kann, ist, da alle in den Ausdruck von y eingehenden Wurzeln nur eine endliche Anzahl von Werthen haben, ebenfalls eine endliche. Zwischen diesen verschiedenen Werthen bestehen aber gewisse Beziehungen, die sich in einem besonderen Falle folgendermassen zusammenfassen lassen:

Wenn die Anzahl der Werthe, welche eine durch Wurzelgrössen ausdrückbare algebraische Function einer Variablen an einer nicht singu-

lären Stelle dadurch annimmt, dass die Veränderliche von diesem Punkte ausgehend alle möglichen durch keinen singulären Punkt hindurchführenden geschlossenen Linien beschreibt, eine Primzahl ist, so bleiben auf allen Wegen, auf denen zwei dieser Werthe keine Aenderung erfahren, auch die übrigen sämmtlich ungeändert.

Die in dem Ausdruck von y vorkommenden Wurzeln, deren Exponenten wir als Primzahlen voraussetzen dürfen, ordnen wir so, dass auf die ersten Plätze in einer beliebigen Reihenfolge diejenigen zu stehen kommen, welche aus rationalen Functionen von x gezogen sind, auf die nächsten die, deren Radicanden rationale Functionen der Variablen und einer oder mehrerer aus rationalen Functionen von x gezogener Wurzeln sind, wieder in einer willkürlichen Aufeinanderfolge u. s. w. Wir beschränken dann die Veränderlichkeit des Punktes x in der Weise, dass wir ihn von a aus nur solche geschlossenen Linien beschreiben lassen, auf denen jene Wurzeln bis zu einer bestimmten $R = S^{\frac{1}{p}}$ hin keine Aenderung erleiden. In diesem Ausdrucke bedeutet p eine Primzahl und S eine rationale Function von x und einigen der vor R stehenden Wurzeln. Alsdann sind zwei Fälle möglich: Der Anfangswerth y_0 kann sich entweder immer noch in alle Werthe verwandeln, die er bei freier Bewegung der Veränderlichen zu erlangen vermochte, oder nur noch in eine gewisse Anzahl derselben. Nimmt R in der oben beschriebenen Reihe die letzte Stelle ein, so kehrt die Function auf allen geschlossenen Wegen zu ihrem Anfangswerthe zurück. Daher muss, wenn man der Reihe nach bei der ersten, zweiten, dritten Wurzel u. s. w. stehen bleibt, endlich einmal der zweite Fall eintreten. Ist R diejenige Wurzel, bei welcher dies zuerst geschieht, so gestatten wir bis auf weiteres der Veränderlichen nur solche von a anfangenden geschlossenen Wege, auf denen sich die vor R stehenden Wurzeln nicht ändern. Trotz der Beschränkung, die der Variablen damit auferlegt ist, kann dann die Function von dem Werthe y_0 ausgehend immer noch in jeden andern der Werthe, die sie an der Stelle a hat, übergehen. Es giebt aber einen Werth y_1, den y nicht mehr in dem Punkte a erreichen kann, ohne dass auf dem Wege, auf dem dies erfolgt, R eine Aenderung erfährt, also, da R^p seinen Anfangswerth wieder annimmt, in ϱR übergeht, wo ϱ eine primitive p^{te} Wurzel der Einheit ist. Wir bezeichnen mit A einen bestimmten Weg, auf dem y_0 in y_1 und R in ϱR übergeht.

Wenn sich auf einem beliebigen Wege B, auf dem y_0 ungeändert bleibt, R in σR verwandelt, so muss, wofern nicht $\sigma = 1$ ist, $\varrho = \sigma^\beta$ sein. Durchläuft dann x erst die Strecke B in umgekehrter Richtung β Mal und darauf die Strecke A, einen Weg, den wir in leicht verständlicher Weise mit $B^{-\beta}A$ bezeichnen wollen, so erleidet R keine Aenderung, während y von y_0 ausgehend zu y_1 gelangt. Da aber nicht auf demselben Wege R in sich selbst und y_0 in y_1 übergehen kann, so muss $\sigma = 1$ sein, also R auf einer Linie, auf der sich y_0 nicht ändert, ebenfalls ungeändert bleiben.

Beschreibt man alle Linien, auf denen R keine Aenderung erfährt, so möge y_0 in die Werthe

$$y_0, \; y_{01}, \; \dots \; y_{0\,q-1}$$

übergehen. Wenn sich diese auf dem Wege A^α in

$$y_\alpha, \; y_{\alpha 1}, \; \dots \; y_{\alpha\, q-1}$$

verwandeln, so stellen die Grössen $y_{\alpha\beta}$, falls α die Zahlen von 0 bis $p-1$ und β die von 0 bis $q-1$ durchläuft, alle Werthe dar, welche y an der Stelle a annehmen kann. Denn ist B ein beliebiger der dem Punkte x gestatteten Wege, und verwandelt sich R auf ihm in $\varrho^\alpha R (\alpha < p)$, so geht y_0 auf dem Wege $BA^{-\alpha}$, weil R auf ihm ungeändert bleibt, in $y_{0\beta} (\beta < q)$ und mithin auf B in $y_{\alpha\beta}$ über. Die genannten Werthe sind ferner sämmtlich von einander verschieden. Denn ist $y_{\alpha\beta} = y_{\gamma\delta}$, und sind B_β und B_δ bestimmte Wege, auf denen y_0 in $y_{0\beta}$ und $y_{0\delta}$, R aber in sich selbst übergeht, so bleibt y_0, also auch R, auf der Linie $B_\beta A^\alpha A^{-\gamma} B_\delta^{-1}$ ungeändert. Da sich folglich R auf dem Wege $A^{\alpha-\gamma}$ nicht ändert, so ist $\alpha = \gamma$. Wenn man aber die Veränderliche mit dem Anfangswerthe $y_{\alpha\beta} = y_{\alpha\delta}$ von y den Weg $A^{-\alpha}$ durchlaufen lässt, so gelangt man zu dem ganz bestimmten Endwerthe $y_{0\beta} = y_{0\delta}$, und in Folge dieser Gleichung ist $\beta = \delta$. Die Anzahl der Werthe, welche y im Punkte a annehmen kann, ist also pq. Setzen wir voraus, dass sie eine Primzahl ist, so muss $q = 1$ sein, und y_0 auf einem Wege, auf dem R keine Aenderung erleidet, ebenfalls ungeändert bleiben.

Ist B ein Weg, auf dem sich y_0, also auch R nicht ändert, so kehrt R, also auch y_0 auf dem Wege $A^\alpha B A^{-\alpha}$ zu seinem Anfangswerthe zurück, und daher erfährt y_α auf dem Wege B keine Aenderung. Wir gelangen so zu dem Ergebnisse, dass auf einem Wege, auf welchem y_0 und die vor R stehenden Grössen die Werthe, von denen sie ausgegangen sind, wieder annehmen, auch die anderen $p-1$ Werthe der Function y ungeändert bleiben müssen.

Wir lassen jetzt die Schranken, welche wir der Veränderlichkeit des Punktes x gesetzt haben, allmälig fallen. Ist Q die Wurzel, welche in der oben bezeichneten Reihe ihren Platz unmittelbar vor R hat, so sei B ein Weg, auf dem sich die vor Q stehenden Grössen nicht ändern. Wenn auf ihm y_0 in y_β und y_1 in $y_{\alpha+\beta}$ übergeht, so erfahren auf der Linie

$$BA^\alpha B^{-1}A^{-1} = C$$

weder y_0 noch die vor R stehenden Grössen eine Aenderung, und daher bleiben auch $y_1, y_2, \dots y_{p-1}$ ungeändert. Folglich geht auf der Strecke

$$A^{-1}C^{-1}BA^\alpha = B$$

y_2 in $y_{2\alpha+\beta}$, mithin y_3 in $y_{3\alpha+\beta}$ und allgemein y_λ in $y_{\alpha\lambda+\beta}$ über, wo die Indices nach dem Modul p zu nehmen sind.

Ist P die Wurzel, welche den Platz zunächst vor Q einnimmt, so sei jetzt B ein Weg, auf dem sich die vor P stehenden Grössen nicht ändern. Wenn auf ihm y_0 in y_β und y_1 in $y_{\alpha+\beta}$ übergeht, so erfahren auf der Linie

$$BA^\alpha B^{-1}A^{-1} = C$$

weder y_0 noch die vor Q stehenden Grössen eine Aenderung. Würde sich y_1 auf ihr ändern, also in y_γ übergehen, dessen Index $\gamma > 1$ ist, so würde sich nach dem eben Bewiesenen y_λ in $y_{\gamma\lambda}$ verwandeln. Es gäbe dann eine Zahl μ, welche der Congruenz

$$\gamma\mu + 1 \equiv \mu \mod p$$

genügte, und wenn y_μ auf der Linie B in y_ν überginge, so würde y_ν auf der Strecke

$$B^{-1}CAB = A^\alpha$$

unverändert bleiben, während es sich doch in $y_{\nu+\alpha}$ verwandelt. Auf der Linie C nimmt also y_1 seinen Anfangswerth wieder an und folglich auch $y_2, y_3, \dots y_{p-1}$. Daraus schliesst man, wie oben, dass y_λ auf dem Wege B in $y_{\alpha\lambda+\beta}$ übergeht.

Indem man so fortfährt, findet man, dass das eben gewonnene Resultat auch richtig bleibt, wenn die Wahl der Linie B gar keiner Beschränkung unterliegt. Bleiben daher auf irgend einem Wege y_0 und y_1 ungeändert, ist also $\beta = 0$ und $\alpha = 1$, so erfahren auch $y_2, y_3, \dots y_{p-1}$ auf ihm keine Aenderung.

§. 2.

Nach einem Fundamentalsatze der Algebra lässt sich jede rationale symmetrische Function der Wurzeln einer algebraischen Gleichung als eine rationale Function der Coefficienten der Gleichung darstellen. Damit aber eine rationale Function der Wurzeln einer Gleichung durch die bekannten Grössen rational ausgedrückt werden könne, ist es nicht immer erforderlich, dass sie symmetrisch sei, d. h. durch keine Substitution der Wurzeln eine Aenderung erfahre. Es genügt schon, wie *Galois* bemerkt hat, wenn sie durch keine Substitution eines gewissen Systems conjugirter Substitutionen, das man daher auch das der Gleichung eigene conjugirte System genannt hat, geändert wird, und diese Bedingung ist nicht nur hinreichend, sondern auch nothwendig. Die Ordnung des so bestimmten conjugirten Systems kann dadurch erniedrigt werden, dass einige irrationale Grössen unter die bekannten aufgenommen, oder, wie *Galois* dies bezeichnet, der Gleichung adjungirt werden. Die Eigenschaften dieses conjugirten Systems, das in der Theorie der durch Wurzelgrössen auflösbaren Gleichungen eine so grosse Rolle spielt, wollen wir für den Fall entwickeln, dass die Coefficienten der Gleichung rationale Functionen einer Variablen sind. Dabei werden wir aber eine andere Definition als die eben erwähnte zu Grunde legen.

Ist $f(x, y)$ eine ganze Function von x und y, die als Function der letzteren Variablen betrachtet keinen quadratischen Divisor hat und vom n^{ten} Grade ist, so nennen wir die Werthe von x, für welche zwei Wurzeln y der Gleichung $f(x, y) = 0$ einander gleich sind, oder eine unendlich gross ist, die *singulären* Stellen der durch diese Gleichung definirten algebraischen Function y von x. Unter der *Umgebung* eines bestimmten singulären oder nicht singulären Punktes verstehen wir die Fläche des Kreises, welcher durch den dem Punkte zunächst gelegenen singulären Punkt geht. Ist a eine beliebige nicht singuläre Stelle, so lassen sich die n Werthe von y, welche einem Punkte x in der Umgebung von a entsprechen, durch n in dieser Umgebung convergente, nach ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen darstellen. Eine solche Reihe nennen wir nach dem Vorgange des Herrn *Weierstrass* ein *Element* der algebraischen Function y. Beschreibt jetzt x von a aus eine geschlossene Linie, die durch keinen sin-

gulären Punkt hindurchführt, so kann eins jener n Functionenelemente, da es nicht aufhören darf, der gegebenen Gleichung Genüge zu leisten, wenn es sich ändert, nur in ein anderes von ihnen übergehen. Es können sich aber nicht zwei verschiedene Wurzeln in dieselbe dritte verwandeln. Denn sonst würde diese auf dem umgekehrten Wege in jede der beiden ersteren übergehen. Eine solche Unbestimmtheit könnte aber nur in dem von uns ausgeschlossenen Falle eintreten, wo der von der Veränderlichen beschriebene Weg durch einen singulären Punkt hindurchführt. Wenn also x von a aus eine geschlossene Strecke beschreibt, so erfahren die Wurzeln der betrachteten Gleichung eine bestimmte Substitution. Stellt man sich daher vor, dass x von a aus der Reihe nach alle möglichen geschlossenen Linien beschreibt, so ergeben sich für diese Wurzeln eine gewisse Anzahl von Substitutionen. Sind S und T zwei derselben, A und B die Wege, auf denen sie erhalten werden, so befindet sich auch TS unter ihnen, da sie auf dem Wege AB erhalten wird. Mithin bilden diese Substitutionen ein conjugirtes System, das, wie man sich leicht überzeugt, von der Wahl des Ausgangspunktes a ganz unabhängig ist, und das wir *das conjugirte System der Gleichung* $f(x, y) = 0$ nennen.

Seien z, z', ... Elemente algebraischer Functionen von x, für die a kein singulärer Punkt ist, so dass wir sie uns durch Reihen, die nach ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreiten, dargestellt denken können. Lässt man x von a aus alle geschlossenen Linien beschreiben, auf denen diese Functionenelemente keine Aenderung erleiden, so erfahren die Wurzeln der gegebenen Gleichung eine gewisse Anzahl von Substitutionen, welche sämmtlich in ihrem conjugirten Systeme enthalten sind. Wenn S und T zwei dieser Substitutionen sind, die auf den Wegen A und B erhalten werden, so ist auch TS unter ihnen, da es auf dem Wege AB erhalten wird, auf dem sich jene Reihen nicht ändern. Mithin bilden diese Substitutionen ein conjugirtes System, welches wir das conjugirte System der Gleichung $f(x, y) = 0$ nennen, wenn ihr die Functionenelemente z, z', ... *adjungirt* sind. Ehe wir die Eigenschaften des conjugirten Systems einer Gleichung, der mehrere algebraische Functionen adjungirt sind, untersuchen können, müssen wir zwei Hülfssätze aus der Analysis entwickeln, welche für den Fall, dass sich die Anzahl der adjungirten Functionenelemente auf Null reducirt, bekannte Theoreme der Functionentheorie sind.

§. 3.

I. *Sind y, z, z', ... Elemente algebraischer Functionen von x, welche in der Umgebung eines für keine dieser Functionen singulären Punktes a eindeutig definirt sind, und bleibt y ungeändert, wenn x von a ausgehend alle möglichen geschlossenen durch keinen singulären Punkt hindurchführenden Wege durchläuft, auf denen z, z', ... keine Aenderung erfahren, so lässt sich y durch x, z, z', ... rational ausdrücken.*

II. *Sind z, z', ... Elemente algebraischer Functionen von x, die in der Umgebung eines nicht singulären Punktes a eindeutig bestimmt sind, und ist $f(x, y)$ eine unzerlegbare ganze Function von y, deren Coefficienten rationale Functionen von x, z, z', ... sind, so giebt es von a ausgehende geschlossene Wege, auf denen z, z', ... ungeändert bleiben, und eine in der Umgebung von a eindeutig definirte Wurzel der Gleichung $f(x, y) = 0$ in eine beliebige andere eben da eindeutig definirte Wurzel derselben Gleichung übergeht.*

Wir nehmen zuerst an, dass nur ein Functionenelement z gegeben ist. Dies genüge einer irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades, $\varphi(x, z) = 0$, deren übrige Wurzeln in der Umgebung von a durch die Functionenelemente

$$z_1, z_2, \ldots z_{m-1}$$

dargestellt sein mögen. Da die Gleichung $\varphi(x, z) = 0$ irreductibel ist, so giebt es nach einem zuerst von *Puiseux* aufgestellten und bewiesenen Satze $m - 1$ Wege

$$A_1, A_2, \ldots A_{m-1},$$

auf denen z in die anderen Wurzeln übergeht. Auf ihnen möge sich y in

$$y_1, y_2, \ldots y_{m-1}$$

verwandeln, wo y_α nicht von y_β verschieden zu sein braucht. Beschreibt x von a ausgehend eine beliebige geschlossene Linie A, und gelangt z_α auf ihr zu dem Werthe z_β, so erfährt z und daher der Voraussetzung nach auch y auf dem Wege $A_\alpha A A_\beta^{-1} = B$ keine Aenderung. Auf der Strecke $A = A_\alpha^{-1} B A_\beta$ geht also y_α in y_β und demnach $z_\alpha^\lambda y_\alpha$ in $z_\beta^\lambda y_\beta$ über. Wenn daher x den Weg A durchläuft, so werden die Grössen

$$z^\lambda y, z_1^\lambda y_1, \ldots z_{m-1}^\lambda y_{m-1}$$

in derselben Weise unter einander vertauscht, wie

$$z, z_1, \ldots z_{m-1}.$$

Da mithin die algebraische Function

$$z^\lambda y + z_1^\lambda y_1 + \cdots + z_{m-1}^\lambda y_{m-1} = t_\lambda$$

auf keinem der von a ausgehenden geschlossenen Wege eine Aenderung erleidet, so muss sie eine rationale Function von x sein. Wird in den m Gleichungen, welche aus der eben gefundenen erhalten werden, indem der Zahl λ die Werthe von 0 bis $m-1$ ertheilt werden, z_α mit z_β vertauscht, so vertauschen sich nur die Werthe, die sich aus ihnen für y_α und y_β berechnen lassen, während der Werth, der sich aus ihnen für y ergiebt, ungeändert bleibt. Daher ist y eine symmetrische Function von

$$z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_{m-1},$$

den Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\varphi(x,s)}{s-z} = 0,$$

und lässt sich folglich durch x und z rational ausdrücken.

Um jetzt den zweiten Satz für den Fall zu beweisen, dass nur ein Functionenelement adjungirt ist, nehmen wir an, es seien

$$y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_{n-1}$$

diejenigen Wurzeln der Gleichung $f(x,y)=0$, in welche ihre Wurzel y übergehen kann, ohne dass z sich ändert, und

$$A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_{n-1}$$

bestimmte Wege, auf denen sich y unter der genannten Bedingung in diese Wurzeln verwandelt. Ist dann A irgend ein Weg, auf dem sich z nicht ändert, so ist auch $A_\alpha A$ ein solcher Weg. Da mithin y auf ihm in eine der Wurzeln

$$y,\ y_1,\ \cdots\ y_{n-1}$$

etwa in y_β übergeht, so gelangt y_α auf der Strecke A zu dem Werthe y_β. Da ferner auf dieser Linie keine zwei Wurzeln in dieselbe dritte übergehen können, so erfahren jene n Wurzeln auf ihr eine bestimmte Substitution. Daher bleibt eine symmetrische Function derselben auf jedem Wege, auf dem z keine Aenderung erleidet, ebenfalls ungeändert und ist mithin eine rationale Function von x und z. Daher genügen sie einer Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten rational durch x und z ausdrückbar sind. Da aber der Annahme nach $f(x,y)$ keinen Divisor hat, dessen Coefficienten rationale Functionen von x und z sind, so muss die Gleichung $f(x,y)=0$ vom n^{ten} Grade sein, und mithin y, ohne dass z eine Aenderung erfährt, in jede andere Wurzel derselben übergehen können.

Jetzt möge der Gleichung für y bereits ein Functionenelement z' adjungirt sein, und ihr ein neues, z, adjungirt werden, eine Wurzel einer irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades $\varphi(x, z', z) = 0$. Mit Benutzung des eben bewiesenen Satzes, dass es Wege giebt, auf denen z, ohne dass z' sich ändert, in jede andere Wurzel dieser Gleichung übergeht, ergiebt sich auf dieselbe Weise wie oben, dass

$$yz^{\lambda} + y_1 z_1^{\lambda} + \cdots + y_{m-1} z_{m-1}^{\lambda} = t_{\lambda}$$

auf allen geschlossenen Wegen, auf denen z' keine Aenderung erfährt, ungeändert bleibt und mithin eine rationale Function von x und z' ist. Daraus folgt wieder leicht, dass sich y durch x, z und z' rational ausdrücken lässt. Mit Hülfe dieses Satzes wird dann der zweite Satz für den Fall bewiesen, dass zwei Functionenelemente adjungirt sind, mit dessen Hülfe der erste für den Fall, dass drei adjungirt sind, u. s. w.

§. 4.

Wenn die Substitutionen eines conjugirten Systems es gestatten, ein Element an die Stelle jedes andern zu setzen, so nennen wir nach *Cauchy* das System *transitiv*, im entgegengesetzten Falle *intransitiv*. Wenn die Substitutionen es gestatten, μ bestimmte Elemente auf die Plätze von μ beliebigen andern zu bringen, so nennen wir das System *μ Mal transitiv*. Mit Benutzung dieser Ausdrücke lässt sich der zweite Satz des vorigen Paragraphen auch folgendermassen aussprechen:

I. *Das conjugirte System einer irreductiblen Gleichung ist transitiv.*

Ist die Gleichung $f(x, y) = 0$ aber reductibel, und ist $g(x, y)$ ein irreductibler Divisor ihrer linken Seite, so kann eine Wurzel der Gleichung $g(x, y) = 0$ auf Wegen, auf denen sich die adjungirten Irrationalen nicht ändern, dieser Gleichung zu genügen nicht aufhören und daher nur in eine andere Wurzel derselben Gleichung übergehen. Denn nach einem Satze der Functionentheorie müssen mehrere in der Umgebung eines bestimmten Punktes definirte Functionenelemente, zwischen denen eine algebraische Gleichung besteht, dieselbe auch noch befriedigen, wenn die Veränderliche einen beliebigen Weg durchläuft, welcher durch keine Stelle hindurchführt, an der für eins jener Functionenelemente die Entwickelbarkeit nach ganzen positiven Potenzen der Aenderungen der Variablen aufhört. Wenn also $f(x, y)$ keinen quadratischen Divisor hat, so kann sich eine Wurzel

der Gleichung $f(x,y)=0$ nicht in eine Wurzel der Gleichung $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=0$ verwandeln, und mithin ist das conjugirte System einer reductiblen Gleichung, die nicht für alle Werthe der Veränderlichen zwei gleiche Wurzeln hat, intransitiv. Daher lässt der vorige Satz folgende Umkehrung zu:

II. *Wenn das conjugirte System einer Gleichung, deren linke Seite keinen quadratischen Divisor hat, transitiv ist, so ist die Gleichung irreductibel.*

Nach einem Satze von *Cauchy* ist die Ordnung m eines μ Mal transitiven Systems conjugirter Substitutionen von n Elementen ein Vielfaches von $n(n-1)\dots(n-\mu+1)$ und die des conjugirten Systems, welches von den μ bestimmte Elemente nicht verrückenden Substitutionen jenes Systems gebildet wird, gleich $\frac{m}{n(n-1)\dots(n-\mu+1)}$. Daraus fliesst der Satz:

III. *Die Ordnung des conjugirten Systems einer irreductiblen Gleichung ist ein Vielfaches ihres Grades, und wird, wenn ihr eine ihrer Wurzeln adjungirt wird, durch ihren Grad getheilt.*

Aus dem Satze von *Cauchy* über die Zahlen, welche die Ordnung eines intransitiven Systems darstellen können, ergiebt sich ferner:

IV. *Die Ordnung des conjugirten Systems einer reductiblen Gleichung ohne quadratischen Theiler ist durch die Ordnungen der conjugirten Systeme ihrer irreductiblen Divisoren theilbar und in dem Producte dieser Ordnungen enthalten.*

Eine Verallgemeinerung der drei ersten Theoreme dieses Paragraphen bildet der leicht zu beweisende Satz:

V. *Wenn zwischen den ersten $\lambda+1$ ($\lambda=0, 1, \dots \mu-1$) von μ Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades keine Gleichung besteht, die in Bezug auf die $(\lambda+1)^{\text{te}}$ von einem geringeren als dem $(n-\lambda)^{\text{ten}}$ Grade ist, so ist das conjugirte System der Gleichung μ Mal transitiv, und seine Ordnung ist ein Vielfaches von $n(n-1)\dots(n-\mu+1)$ und wird, wenn der Gleichung jene μ Wurzeln adjungirt werden, durch $n(n-1)\dots(n-\mu+1)$ getheilt. Wenn dann zwischen jenen μ Wurzeln und einer $(\mu+1)^{\text{ten}}$ eine Gleichung besteht, die in Bezug auf diese von einem geringeren als dem $(n-\mu)^{\text{ten}}$ Grade ist, so ist das System genau μ Mal transitiv.*

Den Schluss dieser Reihe von Sätzen bildet endlich das Theorem:

VI. *Damit das conjugirte System einer Gleichung n^{ten} Grades von*

der Ordnung $1.2\ldots n$ *sei, ist erforderlich und hinreichend, dass eine bestimmte Wurzel nicht durch weniger als* $n-1$ *andere rational ausgedrückt werden könne.*

§. 5.

Der Gleichung n^{ten} Grades $f(x,y)=0$, die keinen quadratischen Divisor habe, mögen mehrere Elemente algebraischer Functionen, z', z'', ..., adjungirt sein, welche in der Umgebung eines Punktes a eindeutig definirt sind, den wir so wählen, dass er für keine der im Laufe der Untersuchung vorkommenden algebraischen Functionen eine Singularität besitzt. Dann darf die Veränderliche x im Folgenden nur solche von a ausgehenden geschlossenen Linien durchlaufen, die durch keinen singulären Punkt gehen, und auf denen die der Gleichung bereits adjungirten Irrationalen keine Aenderung erfahren. Sei $\varphi(x,z)=0$ eine irreductible Gleichung m^{ten} Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von x, z', z'', ... sind, z_0 ein dieser Gleichung genügendes, in der Umgebung von a eindeutig definirtes Functionenelement. Wird jetzt der Gleichung $f(x,y)=0$ noch die Irrationale z_0 adjungirt, so möge Γ ihr conjugirtes System werden.

Durchläuft der Punkt x alle ihm gestatteten Wege, auf denen die Wurzeln der Gleichung $f(x,y)=0$ sämmtlich ungeändert bleiben, so geht z_0 in eine bestimmte Anzahl anderer Wurzeln der Gleichung $\varphi(x,z)=0$ über, die wir mit

$$z_0,\ z_{01},\ \ldots\ z_{0\varrho-1}\quad (Z_0)$$

bezeichnen wollen. Sei B_β ein bestimmter Weg, auf dem sich z_0 in $z_{0\beta}$ verwandelt, ohne dass die Wurzeln der Gleichung $f(x,y)=0$ eine Aenderung erfahren. Enthält die Gruppe Z_0 die Wurzeln nicht sämmtlich, so sei z_1 eine der übrigen Wurzeln. Da die Gleichung $\varphi(x,z)=0$ irreductibel ist, so giebt es einen Weg A_1, auf dem z_0 in z_1 übergeht. Auf diesem mögen sich die Wurzeln der Gruppe Z_0 in

$$z_1,\ z_{11},\ \ldots\ z_{1\varrho-1}\quad (Z_1)$$

verwandeln. Indem man so fortfährt, bringt man die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x,z)=0$ in p Gruppen:

$$\begin{array}{lllll} z_0, & z_{01}, & \ldots & z_{0\,q-1}, & (Z_0) \\ z_1, & z_{11}, & \ldots & z_{1\,q-1}, & (Z_1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ z_{p-1}, & z_{p-1\,1}, & \ldots & z_{p-1\,q-1}. & (Z_{p-1}) \end{array}$$

Dabei ist angenommen, dass die erste Wurzel z_α der Gruppe Z_α nicht in einer der vorhergehenden Gruppen enthalten ist, und dass sich die Gruppe Z_α aus Z_0 ergiebt, indem x einen bestimmten Weg A_α durchläuft.

Besteht nun die Gleichung $z_{\alpha\beta}=z_{\gamma\delta}$, in der wir α als nicht kleiner als γ voraussetzen dürfen, so bleibt z_0 auf dem Wege $B_\beta A_\alpha A_\gamma^{-1} B_\delta^{-1}$ ungeändert, und daher werden die Wurzeln der Gleichung $f(x,y)=0$ auf ihm einer Substitution T des conjugirten Systems Γ unterworfen. Da sich diese Wurzeln aber auf den Wegen B_β und B_δ nicht ändern, so müssen sie die Substitution T auf dem Wege $A_\alpha A_\gamma^{-1}$ erfahren. Nun giebt es aber einen Weg B, auf dem die Substitution T erhalten wird, ohne dass z_0 sich ändert. Da dann die Wurzeln der Gleichung $f(x,y)=0$ auf der Strecke $B^{-1}A_\alpha A_\gamma^{-1}$ keine Aenderung erleiden, so geht z_0 auf ihr in eine Wurzel $z_{0\lambda}$ der Gruppe Z_0 über, mithin auf der Strecke $B^{-1}A_\alpha$ in $z_{\gamma\lambda}$, und daher ist $z_\alpha=z_{\gamma\lambda}$. Nun ist α nicht kleiner als γ, und wenn α grösser ist als γ, so ist z_α nicht in der Gruppe Z_γ enthalten. Daher ist $\alpha=\gamma$ und $z_{\alpha\beta}=z_{\alpha\delta}$. Da aber zwei verschiedene Wurzeln, $z_{0\beta}$ und $z_{0\delta}$, auf dem Wege A_α nicht in dieselbe dritte $z_{\alpha\beta}=z_{\alpha\delta}$ übergehen können, so muss $\beta=\delta$ sein. Mithin kommt in jenen p Gruppen von je q Functionenelementen keine Wurzel der Gleichung m^{ten} Grades $\varphi(x,z)=0$ öfter als ein Mal vor, und daher ist $m=pq$.

Ist B ein bestimmter Weg, auf dem, ohne dass die Wurzeln der Gleichung $f(x,y)=0$ eine Substitution erfahren, z_0 in z_0' übergeht, und ist A irgend ein Weg, auf dem z_0 ungeändert bleibt, so erleidet z_0' auf der Strecke $B^{-1}AB$ keine Aenderung. Auf ihr wird aber dieselbe Substitution der y erhalten wie auf A. Ist aber A' ein beliebiger Weg, auf dem sich z_0' nicht ändert, so ist $BA'B^{-1}$ ein Weg, auf dem z_0 ungeändert bleibt, und dieselbe Substitution der y wie auf A' erhalten wird. Daher wird der Gleichung $f(x,y)=0$ dasselbe conjugirte System Γ eigen, welche Wurzel der Gruppe Z_0 ihr auch adjungirt wird.

Ist A ein Weg, auf dem $z_{\alpha\beta}$ keine Aenderung erleidet, so bleibt $z_{0\beta}$ auf der Strecke $A_\alpha A A_\alpha^{-1}=B$ ungeändert, und folglich werden die y auf ihr einer Substitution T des Systems Γ unterworfen. Ist also S_α die auf dem

Wege A_α erhaltene Substitution, so erfahren die y auf der Strecke $A = A_\alpha^{-1} B A_\alpha$ die Substitution $S_\alpha T S_\alpha^{-1}$. Alle Substitutionen von dieser Form bilden aber ein dem Systeme Γ ähnliches conjugirtes System Γ_α, das von dem Werthe von β ganz unabhängig ist. Das Ergebniss der bisherigen Erwägungen lässt sich so aussprechen:

I. *Die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x, z) = 0$ zerfallen in p Gruppen von je q Wurzeln. Das conjugirte System, das der Gleichung $f(x, y) = 0$ eigen wird, wenn ihr eine Wurzel der irreductiblen Hülfsgleichung adjungirt wird, ist für alle Wurzeln einer Gruppe dasselbe. Die p conjugirten Systeme, welche erhalten werden, wenn aus jeder Gruppe eine Wurzel adjungirt wird, sind einander ähnlich.*

Dieses Theorem ist das erste einer Reihe von vier Sätzen. Um den Zusammenhang derselben deutlicher hervortreten zu lassen, sprechen wir es noch einmal in einer anderen Form aus:

II. *Durchläuft x alle Wege, auf denen eine Wurzel der Gruppe Z_α ungeändert bleibt, so erfahren die Wurzeln der Gleichung $f(x, y) = 0$ alle Substitutionen des conjugirten Systems Γ_α und keine anderen.*

Daran schliesst sich zunächst der Satz:

III. *Durchläuft x alle Wege, auf denen die Wurzeln der Gleichung $f(x, y) = 0$ keine Aenderung erfahren, so geht eine Wurzel der Gruppe Z_α in jede andere derselben Gruppe, aber in keine einer andern Gruppe über.*

Ist B ein bestimmter Weg, auf dem, ohne dass die y eine Substitution erfahren, z_0 in die Wurzel z_0' der Gruppe Z_0 übergeht, und ist A irgend ein Weg, auf dem die y keine Aenderung erleiden, so bleiben sie auch auf der Strecke BA ungeändert, und daher geht z_0 auf ihr in eine Wurzel z_0'' der Gruppe Z_0 über. Auf der Strecke A muss sich also z_0' in z_0'' verwandeln. Da demnach auf einem Wege, auf dem die y keine Substitution erfahren, eine Wurzel der Gruppe Z_0 nur in eine andere derselben Gruppe übergehen kann, so muss sich $z_{0\beta}$ auf der Strecke $A_\alpha B A_\alpha^{-1}$ in $z_{0\gamma}$, und daher $z_{\alpha\beta}$ auf B in $z_{\alpha\gamma}$ verwandeln. Sind ferner $z_{\alpha\beta}$ und $z_{\alpha\gamma}$ zwei beliebige Wurzeln der Gruppe Z_α, so geht auf dem Wege $A_\alpha^{-1} B_\beta^{-1} B_\gamma A_\alpha$, auf dem sich die y nicht ändern, $z_{\alpha\beta}$ in $z_{\alpha\gamma}$ über.

IV. *Durchläuft x alle Wege, auf denen die Wurzeln der Gruppe Z_α in einander übergehen, so erfahren die Wurzeln der Gleichung $f(x, y) = 0$ alle Substitutionen des conjugirten Systems Γ_α und keine anderen.*

Ist A irgend ein Weg, auf dem eine Wurzel der Gruppe Z_α in eine beliebige andere derselben Gruppe übergeht, so giebt es einen Weg B, auf dem dasselbe geschieht, ohne dass die y sich ändern. Dann bleibt jene Wurzel auf der Strecke AB^{-1} ungeändert, und daher erfahren die y auf ihr, also auch auf A, eine Substitution des Systems Γ_α.

V. *Durchläuft x alle Wege, auf denen die Wurzeln der Gleichung $f(x,y)=0$ eine Substitution des conjugirten Systems Γ_α erfahren, so geht eine Wurzel der Gruppe Z_α in jede andere derselben Gruppe, aber in keine einer andern Gruppe über.*

Ist A irgend ein Weg, auf dem eine Substitution des Systems Γ_α erhalten wird, so giebt es einen Weg B, auf dem dasselbe geschieht, ohne dass $z_{\alpha\beta}$ sich ändert. Dann bleiben auf der Strecke $B^{-1}A$ die y ungeändert, und daher geht $z_{\alpha\beta}$ auf ihr, also auch auf A in eine andere Wurzel der Gruppe Z_α über.

§. 6.

I. *Wenn eine irreductible Gleichung dadurch reductibel wird, dass ihr alle Wurzeln einer anderen Gleichung adjungirt werden, so sind die irreductiblen Gleichungen, in die sie zerfällt, alle von demselben Grade. Die Coefficienten jeder von diesen Gleichungen lassen sich ohne Benutzung der Wurzeln der Hülfsgleichung durch eine ihrer eigenen Wurzeln rational ausdrücken.*

Nach dem Satze III §. 5 kann eine Wurzel der Gruppe Z_α nur in eine andere Wurzel derselben Gruppe übergehen, wenn der irreductiblen Gleichung $\varphi(x,z)=0$ alle Wurzeln der Gleichung $f(x,y)=0$ adjungirt werden. Eine symmetrische Function der in der Gruppe Z_α enthaltenen Wurzeln bleibt mithin auf allen Wegen, die dem Punkte x dann noch gestattet sind, ungeändert und lässt sich daher durch x und die adjungirten Functionenelemente rational ausdrücken. Folglich genügen die Wurzeln der Gruppe Z_α einer Gleichung q^{ten} Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von x und den adjungirten Functionenelementen sind, und die irreductibel ist, weil eine Wurzel der Gruppe Z_α, ohne dass sich die y ändern, in jede andere Wurzel derselben Gruppe übergehen kann. Durchläuft x irgend einen Weg, auf dem $z_{\alpha\beta}$ ungeändert bleibt, so erfahren die y eine Substitution des conjugirten Systems Γ_α, und mithin geht jede Wur-

zel der Gruppe Z_α in eine andere derselben Gruppe über. Daher erleiden die Coefficienten der Gleichung q^{ten} Grades, welcher die Wurzeln der Gruppe Z_α genügen, auf einem Wege, auf dem sich $z_{\alpha\beta}$ nicht ändert, ebenfalls keine Aenderung und lassen sich also durch x und $z_{\alpha\beta}$ rational ausdrücken. Aus den beiden Theilen des eben bewiesenen Satzes lassen sich zwei Folgerungen ziehen:

II. *Wenn eine irreductible Gleichung, deren Grad eine Primzahl ist, dadurch reductibel wird, dass ihr alle Wurzeln einer andern Gleichung adjungirt werden, so wird sie dadurch aufgelöst.*

III. *Wenn eine Gleichung, deren conjugirtes System mehr als ein Mal transitiv ist, dadurch reductibel wird, dass ihr alle Wurzeln einer andern Gleichung adjungirt werden, so wird sie dadurch aufgelöst.*

Denn wäre $q > 1$, so müsste, wie eben gezeigt ist, auf einem Wege, auf dem eine Wurzel z_α der Gruppe Z_α ungeändert bleibt, eine andere in ihr enthaltene Wurzel z'_α wieder in eine derselben Gruppe angehörige Wurzel übergehen. Da aber das conjugirte System der Gleichung $\varphi(x, z) = 0$ mehr als ein Mal transitiv ist, so giebt es einen Weg, auf dem z_α in sich selbst und z'_α in eine beliebige andere Wurzel dieser Gleichung übergeht. Mithin müsste $q = m$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

IV. *Zerfällt die linke Seite einer irreductiblen Gleichung, wenn ihr alle Wurzeln einer andern Gleichung adjungirt werden, in p unzerlegbare Factoren, so wird die Ordnung des conjugirten Systems der letzteren, wenn ihr eine Wurzel der ersteren adjungirt wird, durch p getheilt.*

Ist A ein beliebiger Weg, und ist $z_{\alpha\beta}$ die Wurzel, in welche z_0 auf ihm übergeht, so erfolgt auf der Strecke $AA_\alpha^{-1} = B$, weil sich z_0 auf ihr in $z_{0\beta}$ verwandelt, eine Substitution T des Systems Γ. Ist also S_α die auf A_α erhaltene Substitution, so erfahren die y auf dem Wege $A = BA_\alpha$ die Substitution $S_\alpha T$. Sind ferner T und T' zwei Substitutionen von Γ, und ist $S_\alpha T = S_\beta T'$, so ergiebt sich auf dem Wege $A_\alpha A_\beta^{-1}$ die Substitution $S_\beta^{-1} S_\alpha = T' T^{-1}$, die in dem Systeme Γ enthalten ist. Also geht z_0 auf ihm in eine Wurzel $z_{0\gamma}$ der Gruppe Z_0 und mithin auf A_α in $z_{\beta\gamma}$ über. Folglich ist $\alpha = \beta$ und daher auch $T = T'$. Sind demnach

$$T_0, T_1, \dots T_{r-1}$$

die Substitutionen von Γ, so besteht das conjugirte System der Gleichung $f(x, y) = 0$ aus den Substitutionen

$$\begin{array}{llll} T_0, & T_1, & \dots & T_{r-1}, \\ S_1 T_0, & S_1 T_1, & \dots & S_1 T_{r-1}, \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ S_{p-1} T_0, & S_{p-1} T_1, & \dots & S_{p-1} T_{r-1}, \end{array}$$

und mithin ist seine Ordnung gleich pr. Damit ist die Behauptung erwiesen, in welcher der Satz III §. 4 als ein specieller Fall enthalten ist. Eine interessante Anwendung dieser beiden Theoreme giebt der folgende Satz:

V. *Wenn eine irreductible Gleichung, deren Grad n eine Primzahl ist, dadurch reductibel wird, dass ihr eine Wurzel einer irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades adjungirt wird, so ist n ein Divisor von m.*

Die Ordnung des conjugirten Systems der irreductiblen Gleichung n^{ten} Grades ist durch n theilbar. Zerfällt sie, wenn ihr eine Wurzel einer irreductiblen Hülfsgleichung m^{ten} Grades adjungirt wird, in mehrere irreductible Factoren von den Graden $a, b, c, \dots$, so ist, wie leicht zu sehen, die Ordnung des conjugirten Systems der nunmehr reductiblen Gleichung ein Divisor von $1.2\dots a.1.2\dots b.1.2\dots c\dots$ und mithin, da n eine Primzahl ist, und $a, b, c, \dots$ sämmtlich kleiner als n sind, nicht mehr durch n theilbar. Nun ist aber die Ordnung des ihr gegenwärtig eigenen conjugirten Systems ein Divisor der Ordnung des ihr vorher eigenen. Also muss die letztere dadurch, dass der Gleichung n^{ten} Grades die Wurzel der Hülfsgleichung adjungirt ist, durch ein Vielfaches von n getheilt worden sein. Die Zahl, durch welche sie getheilt wird, ist aber ein Divisor von m, und daher muss auch n in m enthalten sein.

VI. *Wenn sich das conjugirte System einer Gleichung, G, dadurch auf das conjugirte System Γ reducirt, dass ihr alle Wurzeln einer andern Gleichung adjungirt werden, so wird das System Γ dadurch nicht geändert, dass in den Cyclen aller seiner Substitutionen irgend eine Substitution von G ausgeführt wird.*

Ist A ein beliebiger der dem Punkte x gestatteten Wege und B ein Weg, auf dem ausser den bereits adjungirten Irrationalen noch die Wurzeln der Hülfsgleichung ungeändert bleiben, so wird auf A eine Substitution S von G und auf B eine Substitution T von Γ erhalten. Da die Wurzeln der Hülfsgleichung auf der Strecke $A^{-1}BA$ ebenfalls keine Aenderung erleiden, so muss die auf ihr bewirkte Substitution STS^{-1} in dem Systeme Γ enthalten sein. Diese wird aber bekanntlich erhalten, indem die Substitution S in den Cyclen von T ausgeführt wird.

VII. *Wenn sich das conjugirte System einer Gleichung, G, dadurch auf das conjugirte System Γ reducirt, dass ihr eine Wurzel einer irreductiblen Gleichung adjungirt wird, und wenn sich alle Wurzeln der letzteren durch eine von ihnen rational ausdrücken lassen, so wird das System Γ dadurch nicht geändert, dass in den Cyclen aller seiner Substitutionen irgend eine Substitution von G ausgeführt wird.*

Sind z_0 und z_1 zwei Wurzeln der irreductiblen Hülfsgleichung, so giebt es einen Weg A, auf dem z_0 in z_1 übergeht. Auch kann eine Zahl r von der Beschaffenheit gefunden werden, dass z_0 auf A^r zu ihrem Anfangswerthe zurückkehrt. Ist dann B irgend ein Weg, auf dem z_1 keine Aenderung erleidet, so bleibt, wenn die Veränderliche die Linie $ABA^{-1}=C$ beschreibt, z_0 ungeändert, also auch z_1, falls es sich durch x und z_0 rational ausdrücken lässt. Mithin erfährt z_0 und daher auch z_1 auf der Strecke $ACA^{-1}=A^2BA^{-2}$ ebenfalls keine Aenderung. Da folglich z_1 auf der Linie $A^{r-1}BA^{-(r-1)}$, wie eine wiederholte Anwendung dieses Schlusses zeigt, in sich selbst, auf A^{r-1} aber in z_0 übergeht, so muss z_0 auf einem Wege B, auf dem z_1 keine Aenderung erfährt, ebenfalls ungeändert bleiben.

Nun sind der Annahme nach alle Wurzeln der Hülfsgleichung rationale Functionen von x und z_0. Beschreibt also die Veränderliche alle Linien, auf denen eine dieser Wurzeln keine Aenderung erleidet, so hat sie auch alle Wege durchlaufen, auf denen alle Wurzeln ihre Anfangswerthe wieder annehmen. Mithin reducirt sich das conjugirte System einer Gleichung G, wenn ihr eine Wurzel der Hülfsgleichung adjungirt wird, auf das nämliche conjugirte System Γ, wie wenn ihr alle Wurzeln derselben adjungirt werden, und damit ist der behauptete Satz auf den vorigen zurückgeführt.

VIII. *Das conjugirte System, das einer Gleichung eigen wird, wenn ihr eine rationale Function ihrer Wurzeln adjungirt wird, besteht aus denjenigen Substitutionen des ihr vorher eigenen conjugirten Systems, durch welche jene Function nicht geändert wird.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge der Definition, die von dem conjugirten Systeme einer Gleichung, der gewisse algebraische Functionen adjungirt sind, aufgestellt worden ist. Es bleibt also noch übrig, die Uebereinstimmung dieser Definition mit der von *Galois* gegebenen nachzuweisen. Dies geschieht durch den Satz:

IX. *Jede rationale Function der Wurzeln einer Gleichung, welche*

durch die Substitutionen ihres conjugirten Systems nicht geändert wird, lässt sich durch die bekannten Grössen rational ausdrücken, und jede rationale Function der Wurzeln, welche sich durch die bekannten Grössen rational ausdrücken lässt, wird durch die Substitutionen ihres conjugirten Systems nicht geändert.

Wenn die Veränderliche von einem nicht singulären Punkte aus alle geschlossenen Strecken durchläuft, die ihr gestattet sind, so erfahren die Wurzeln der gegebenen Gleichung die Substitutionen ihres conjugirten Systems. Eine rationale Function der Wurzeln, welche durch diese Substitutionen nicht geändert wird, ist folglich eine algebraische Function, die auf allen geschlossenen Linien ihren ursprünglichen Werth wieder erlangt, und mithin eine rationale Function der unabhängigen Variablen und der adjungirten Irrationalen. Lässt sich umgekehrt eine rationale Function der Wurzeln durch die bekannten Grössen rational ausdrücken, so erfährt sie auf keinem Wege, den die Veränderliche durchlaufen darf, und da die Wurzeln der gegebenen Gleichung auf solchen Wegen allen Substitutionen ihres conjugirten Systems unterworfen werden, durch keine dieser Substitutionen eine Aenderung.

Berlin, im October 1871.

Zur Theorie der Determinanten.

(Von Herrn *J. J. Weyrauch.*)

Es sei die Determinante n^{ten} Grades

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

gegeben. Wir legen uns die Fragen vor:

1) Wieviel Glieder der Determinante D enthalten m *bestimmte* Elemente (weder mehr noch weniger) $a_{11}, a_{22}, \dots a_{mm}$ der Diagonale?

2) Wieviel Glieder der Determinante D enthalten m *beliebige* Elemente der Diagonale?

3) Wieviel Glieder enthalten m oder weniger Diagonalelemente?

4) Wieviel Glieder enthalten k oder mehr Diagonalelemente?

5) In welcher Weise setzt sich die Gesammtgliederzahl aus den Gliedern mit 0 bis n Elementen der Diagonale zusammen?

Der Coefficient von a_{11} ist eine Determinante $n-1^{\text{ten}}$ Grades, es giebt also $(n-1)!$ Glieder, welche a_{11} enthalten; a_{22} kommt ebenfalls in $(n-1)!$ Gliedern vor, darunter befinden sich aber $(n-2)!$, worin auch a_{11} Factor ist. Die Determinante D hat also $2(n-1)!-(n-2)!$ Glieder, welche a_{11} oder a_{22} oder beide zugleich enhalten.

Um nun die Anzahl $F^{(1+)}$ der Glieder zu finden, in welchen überhaupt Elemente der Diagonale vorkommen, füge man zu $(n-1)!$ der Reihe nach die Anzahlen der Glieder, in welchen $a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots$ aber keines der vorhergehenden Elemente als Factor enthalten ist. Dann hat man folgende Aggregate zu summiren:

$$(n-1)!,$$
$$(n-1)!-(n-2)!,$$
$$(n-1)!-2(n-2)!+(n-3)!,$$
$$(n-1)!-3(n-2)!+3(n-3)!-(n-4)!,$$
$$(n-1)!-4(n-2)!+6(n-3)!-3(n-4)!+(n-5)!,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(n-1)!-\binom{n-1}{1}(n-2)!+\binom{n-1}{2}(n-3)!-\cdots$$
$$+(-1)^{n-3}\binom{n-1}{n-3}2!+(-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}1!+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1,$$

wo mit $\binom{\mu}{\nu}$ der ν^{te} Binomialcoefficient des Exponenten μ bezeichnet ist, und erhält

$$F^{(1+)}=n(n-1)!-[1+2+\cdots+(n-1)](n-2)!+\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n-1}{2}\right](n-3)!$$
$$+\cdots+(-1)^{n-3}\left[\binom{n-3}{n-3}+\binom{n-2}{n-3}+\binom{n-1}{n-3}\right]2!+(-1)^{n-2}\left[\binom{n-2}{n-2}+\binom{n-1}{n-2}\right]1!$$
$$+(-1)^{n-1}\left[\binom{n-1}{n-1}\right]1.$$

Die Glieder der in den Eckklammern stehenden Summen sind figurirte Zahlen der 1ten bis $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung und ihre Summen gleich

$$\binom{n}{2},\ \binom{n}{3},\ \ldots\ \binom{n}{n-1},\ \binom{n}{n},$$

so dass durch Substitution und Reduction:

$$(1.)\quad F^{(1+)}=n!\left[1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right].$$

Dies ist die Anzahl der Glieder, welche überhaupt Elemente der Diagonale enthalten. Die Anzahl $F^{(0)}$ der Glieder, welche keine Diagonalelemente enthalten, wird also:

$$(2.)\quad F^{(0)}=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n}}{n!}\right].$$

Ausschliesslich m bestimmte Diagonalelemente kommen in so vielen Gliedern — die Anzahl derselben heisse $f^{(m)}$ — der Determinante D vor, als die Partialdeterminante, welche den Coefficienten des Products der m Elemente bildet, Glieder besitzt, die kein Element der Diagonale enthalten; d. h.

$$(3.)\quad f^{(m)}=(n-m)!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\right].$$

Diese Formel ist gültig von $m=0$, wo sie in (2.) übergeht, bis $m=n-2$, wofür $f^{(n-2)}=2!\left[\frac{1}{2}\right]=1$.

Glieder mit $n-1$ Diagonalelementen existiren nicht, was selbstverständlich ist, indem sämmtliche Glieder aus dem Anfangsglied, welches alle Diagonalelemente enthält, durch Permutation abgeleitet werden, dabei aber wenigstens zwei erste oder zweite Indices sich ändern.

Die Gleichung (3.) führt noch auf die Relation:

$$(4.)\quad f_{n+1}^{(m)} = (n+1-m) f_n^{(m)} + (-1)^{n+1-m},$$

wobei allgemein unter $f_r^{(m)}$ die Function $f^{(m)}$ für die Determinante r^{ten} Grades zu verstehen ist.

Aus n Elementen lassen sich $\binom{n}{m}$ Combinationen m^{ter} Klasse herstellen. Daher beträgt die Anzahl der Glieder, welche irgend m Elemente der Diagonale enthalten

$$(5.)\quad F^{(m)} = (n-m)!\binom{n}{m}\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\right],$$

gültig von $m=0$ bis $m=n-2$, wofür $F^{(n-2)}=\binom{n}{2}$.

Die Anzahl der Glieder, welche m oder weniger Diagonalelemente enthalten, wird demnach

$$(6.)\quad F^{(m-)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=m}(n-\mu)!\binom{n}{\mu}\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-\mu}}{(n-\mu)!}\right]$$

und die Anzahl derjenigen, welche k oder mehr enthalten:

$$(7.)\quad F^{(k+)} = n! - \sum_{\mu=0}^{\mu=k-1}(n-\mu)!\binom{n}{\mu}\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-\mu}}{(n-\mu)!}\right].$$

Ist $m=k-1$, dann wird selbstverständlich:

$$(8.)\quad n! = F^{(k-1-)} + F^{(k+)}.$$

Aus der Gleichung (5.) folgt ferner:

$$(9.)\quad n! = 1 + \sum_{m=0}^{m=n-2} F^{(m)}.$$

Bezeichnet man die Anzahl der Glieder, bei welchen in einer Determinante r^{ten} Grades kein Diagonalelement vorkommt, durch $\varphi(r)$, so ergeben sich aus den bis jetzt erhaltenen Gleichungen folgende einfachste Formeln:

$$\text{I.}\quad f^{(m)} = \varphi(n-m),$$

$$\text{II.}\quad F^{(m)} = \binom{n}{m}\varphi(n-m),$$

$$\text{III.}\quad F^{(m-)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=m}\binom{n}{\mu}\varphi(n-\mu),$$

$$\text{IV.}\quad F^{(k+)} = 1 + \sum_{\mu=k}^{\mu=n-2}\binom{n}{\mu}\varphi(n-\mu),$$

$$\text{V.}\quad n! = 1 + \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2}\binom{n}{\mu}\varphi(n-\mu),$$

als Beantwortung der fünf gestellten Fragen.

Aus Gleichung I ersieht man den Satz:

In den Gliedern der Determinante n^{ter} Ordnung kommen ebenso oft m bestimmte Elemente der Diagonale vor, wie $m-p$ bestimmte Elemente in Gliedern der Determinante $n-p^{\text{ter}}$ Ordnung.

Nach den bekannten Eigenschaften der Determinanten versteht es sich von selbst, dass die gefundenen Lösungen der Fragen in Betreff des Systems der n Diagonalelemente der Determinante D genau ebenso gelten, wenn man die Diagonalelemente durch irgend ein System n transversaler Elemente ersetzt, d. h. n solcher Elemente, unter welchen sich weder zwei aus derselben Horizontalreihe, noch zwei aus derselben Verticalreihe befinden.

Berlin, November 1871.

Ueber Normalen rationaler Raumcurven.

(Von Herrn *Emil Weyr* in Prag.)

Es sei C_n eine rationale Raumcurve n^{ter} Ordnung. Um die durch einen beliebigen Punkt o des Raumes gehenden Normalen der Curve zu erhalten, betrachte man o als Mittelpunkt eines Systems concentrischer Kugeln; es werden dann so viele Normalen der Curve durch den Punkt o gehen, als es Kugeln des Systems giebt, die C_n berühren. Und zwar werden die Fusspunkte der Normalen zugleich die Berührungspunkte der tangirenden Kugeln sein.

Das System concentrischer Kugeln ist ein Flächenbüschel zweiten Grades, in welchem die unendlich entfernte Ebene des Raumes doppelt gezählt auch eine Fläche des Büschels darstellt; denn die Flächen haben in der unendlich entfernten Ebene längs des imaginären Kugelkreises einen gemeinschaftlichen Tangentenkegel, dessen Mittelpunkt o ist.

Das System concentrischer Kugeln wird somit auf der rationalen Raumcurve eine Punktinvolution $2n^{ten}$ Grades bestimmen*), nämlich jene, welche von den Gruppen der $2n$ Schnittpunkte der Curve mit den einzelnen Kugeln des Systems gebildet wird. Diese Involution wird somit $2(2n-1)$ d. i. $4n-2$ Doppelpunkte besitzen, unter welchen sich jedoch auch die n unendlich entfernten Punkte der Curve C_n befinden. Diese unendlich entfernten Punkte sind Doppelpunkte der in Betracht gezogenen Involution, da sie die Schnittpunkte der Curve mit der doppelt gezählten unendlich entfernten Ebene sind und daher jeder von ihnen für zwei einfache Schnittpunkte gilt. Im Endlichen verbleiben somit nur noch $3n-2$ Doppelpunkte der Involution und jeder von ihnen giebt Veranlassung zu einer berührenden Kugel des concentrischen Systems, und somit zu einer durch o gehenden Normale der Curve C_n. Wir gelangen daher zu folgendem Ergebniss:

---

*) Siehe: „Sopra alcune singolarità di second' ordine delle curve gobbe razionali". Annali di matematica tomo IV. fasc. IV.

Durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen $3n-2$ Normalen einer rationalen Raumcurve n^{ter} Ordnung.

Jede durch o gehende Normale von C_n liegt in einer durch o gehenden Normalebene der Curve, und umgekehrt liefert jede durch o gehende Normalebene von C_n eine durch denselben Punkt gehende Normale der Curve, so dass wir auch sagen können:

Durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen $3n-2$ Normalebenen einer rationalen Raumcurve n^{ter} Ordnung.

Die Normalebenen sind Berührungsebenen der Fläche der Krümmungsaxen und wir haben daher auch den Satz:

Die Fläche der Krümmungsaxen einer rationalen Raumcurve n^{ter} Ordnung ist von der $3n-2^{ten}$ Classe.

Es sei hier bemerkt, dass die Fläche der Krümmungsaxen vom Grade $6(n-1)$ ist.

Dieselben Betrachtungen, welche wir für Raumcurven durchgeführt haben, lassen sich auch für rationale ebene Curven anstellen, und es tritt an die Stelle des concentrischen Kugelsystems ein System concentrischer Kreise.

Prag, im October 1871.

Ueber die Anzahl der Doppelnormalen einer rationalen Raumcurve.

(Von Herrn *Emil Weyr* in Prag.)

Wenn man die Ergebnisse der Betrachtungen, welche in dem S. 189—192 dieses Bandes abgedruckten, sowie in dem vorstehenden Aufsatz enthalten sind, gleichzeitig auf die rationalen Raumcurven zur Anwendung bringt, so kann man in folgender Weise die Zahl der Doppelnormalen einer Raumcurve n^{ter} Ordnung bestimmen. Sei x ein Punkt der Raumcurve C_n, α seine Normalebene und y einer von den weiteren $n-1$ Schnittpunkten der Ebene α mit der Curve C_n. Wenn wir nun dem Punkte x den Punkt y als entsprechend zuordnen, so ist es nicht schwer, die Grade dieser Verwandtschaft zu bestimmen. Zunächst ist aus dem Gesagten klar, dass jedem Punkte x, $n-1$ Punkte y entsprechen, so dass das y-System $(n-1)$-deutig ist. Dagegen kann man durch einen Punkt y der Curve ausser dessen Normalebene noch weitere $(3n-2)-1$ d. i. $3n-3$ Normalebenen zur Curve C_n legen, deren Fusspunkte ebensoviele, dem Punkte y entsprechende Punkte x sind. Das x-System ist somit $3(n-1)$-deutig. Die Zahl der involutorischen Elementenpaare wird somit:

$$\frac{1}{2}\Big[(n-1)(n-2)+3(n-1)(3n-4)\Big]=(n-1)(5n-7)$$

sein. Bezeichnet man mit x', y' die Punkte eines solchen involutorischen Elementenpaares, so wird nach der Art der angegebenen Verwandtschaft der beiden Systeme die Beziehung zwischen x' und y' darin bestehen, dass die Normalebene des einen Punktes durch den anderen Punkt hindurchgeht. Die Schnittlinie der beiden Normalebenen, welche man in x' und y' zur Curve C_n legen kann, wird somit die Gerade $x'y'$ selbst sein, woraus nun unmittelbar folgt, dass diese Verbindungslinie $x'y'$ eine Doppelnormale der Raumcurve C_n ist. Wir können somit sagen:

Eine rationale Raumcurve n^{ter} Ordnung besitzt $(n-1)(5n-7)$ *Doppelnormalen.*

Von diesen Doppelnormalen liegen jedoch $\frac{n(n-1)}{2}$ in der unendlich entfernten Ebene des Raumes, da man hier so wie bei den ebenen Curven die Verbindungslinie zweier unendlich entfernten Punkte der Curve als eine Doppelnormale betrachten muss. Im Endlichen verbleiben somit bloss:

$$\left[(n-1)(5n-7)-\frac{n(n-1)}{2}\right]=\frac{(n-1)(9n-14)}{2}$$

Doppelnormalen, so dass wir den folgenden Satz aussprechen können:

Eine rationale Raumcurve n^{ter} Ordnung besitzt $\frac{(n-1)(9n-14)}{2}$ *im Endlichen liegende Doppelnormalen.*

Ein Kegelschnitt besitzt im Endlichen *zwei*, eine cubische Raumcurve *dreizehn*, eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art 33 Doppelnormalen u. s. w.

Prag, im October 1871.

Ueber Auflösung von Gleichungen und Summation von Reihen durch bestimmte Integrale.

(Von Herrn *Paul du Bois-Reymond* in Freiburg i. Br.)

Es besteht jedenfalls nur eine äusserliche und keine tiefer im Wesen der Sache begründete Verwandtschaft zwischen den Lösungen der beiden Probleme: Die Wurzeln beliebiger Gleichungen, und die Summen von Reihen durch allgemeine Formeln darzustellen. Es seien $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ Wurzeln einer Gleichung $f(z)=0$. Gelingt es, die Summe dieser Wurzeln: $Z_1+Z_2+\cdots+Z_n$ durch allgemeine Formeln z. B. durch bestimmte Integrale darzustellen, so kann man erfahrungsgemäss auch gewöhnlich die Summe $F(Z_1)+F(Z_2)+\cdots+F(Z_n)$, wo F eine beliebige Function, in ähnlicher Weise ausdrücken. Ist dann z. B. $\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)$ zu summiren, so wird dies geleistet sein, wenn man $\varphi=F$ und $f(z)=\sin\pi z$ setzt.

Dergleichen allgemeine Formeln, zu denen man auch die *Lagrange*sche Reihe zählen muss, sind schon oft genug von verschiedenen Autoren aufgestellt worden, wobei zumeist entweder Integrale mit complexen Grenzen oder der *Fourier*schen ähnliche Formeln das Mittel lieferten. Die *Lagrange*sche Reihe abgerechnet, sind nun zwar solche Formeln ohne praktischen Nutzen geblieben. Gleichwohl meine ich, es könne einiges Interesse haben, die gemeinsame Quelle auch jener Formeln in der so ergebnissreichen Lehre der über complexe Wege genommenen Integrale aufgedeckt zu finden. Es zeigt sich, dass die *Lagrange*sche Reihe, die älteren Formeln von *Parceval, Jacobi, Cauchy* und verschiedene andere von geringerer Bedeutung, nahe liegende Consequenzen aus gewissen allgemeinen Formeln sind, die ihrerseits wieder aus dem *Cauchy*schen Fundamentaltheorem:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz$$

sich sehr leicht herleiten lassen. Mit jenen allgemeinen Formeln sind gemeint die Formeln (5.), (6.) und (8.) der folgenden Mittheilung. Ich erlaube mir besonders auf die im Art. IV. enthaltene Discussion der *Lagrange*schen Reihe aufmerksam zu machen, welche nicht allein zu dem ihr Legitimitätsgebiet endgültig beherrschenden Satze führt, sondern (Bemerkungen) auch zeigt, welche Richtung zu einer vollständigen Theorie jener Reihe die Untersuchung einzuschlagen hat.

I. Ueber einige complexe Integrale.

Man hat:

$$\int_{z_0}^{z} \log z\, dz = \Big|_{z_0}^{z} (z \log z - z),$$

wo mit der Bezeichnung rechts vom Gleichheitszeichen die Differenz der Werthe für z und z_0 gemeint ist.

Lassen wir die variable obere Grenze des Integrals um den Nullpunkt herumgehen und in den Punkt z_0 zurückkehren, so erhalten wir:

$$(1.)\quad \int_{z_0}^{z_0} \log z\, dz = 2\pi i z_0,$$

weil der Logarithmus bei diesem Umgang um $2\pi i$ zugenommen hat. Der Werth dieses Integrals hängt also vom Ausgangspunkt des Integrationsweges ab, sonst ist es vom Integrationsweg, wofern er den Nullpunkt umschliesst, unabhängig.

Ferner ist:

$$\int_{z_0}^{z} \log\left(1-\frac{Z}{z}\right) dz = \Big|_{z_0}^{z} ((z-Z)\log(z-Z) - z\log z).$$

Wird die variable obere Grenze um die Punkte $z=0$, $z=Z$ herum zum Punkt $z=z_0$ zurückgeführt, so ergiebt sich:

$$(2.)\quad \int_{z_0}^{z_0} \log\left(1-\frac{Z}{z}\right) dz = (z_0-Z)2\pi i - z_0 2\pi i = -2\pi i Z.$$

Das Integral linker Hand hängt also lediglich vom Punkt Z ab und ist vom Integrationsweg, wofern er die Punkte $z=0$, $z=Z$ umschliesst, ganz unabhängig.

Drittens ist:

$$\int_{z_0}^{z} F'(z)\log(z-Z)\, dz = \Big|_{z_0}^{z} F(z)\log(z-Z) - \int_{z_0}^{z} \frac{F(z)}{z-Z} dz.$$

Wir nehmen an, dass innerhalb des Gebietes, dem der Integrationsweg des Integrals linker Hand angehört, $F(z)$ eindeutig, stetig ist, und lassen die obere Grenze z um den Punkt $z=Z$ herumgehen und zum Punkt $z=z_0$ zurückkehren. Wir finden dann:

$$(3.)\quad \int_{z_0}^{z_0} F'(z)\log(z-Z)\, dz = 2\pi i \{F(z_0) - F(Z)\}.$$

Endlich ist:

$$\int_{z_0}^{z} F'(z)\log\left(1-\frac{Z}{z}\right)dz = \Big|_{z_0}^{z} F(z)\log\left(1-\frac{Z}{z}\right) - \int_{z_0}^{z}\frac{F(z)Z}{z(z-Z)}dz.$$

Wegen:

$$\int_{z_0}^{z}\frac{F(z)Z}{z(z-Z)}dz = \int_{z_0}^{z}\frac{F(z)}{z-Z}dz - \int_{z_0}^{z}\frac{F(z)}{z}dz.$$

erhält man durch Herumführen des Integrationsweges um die Punkte $z=0$, $z=Z$

$$(4.)\quad \int_{z_0}^{z_0} F'(z)\log\left(1-\frac{Z}{z}\right)dz = -2\pi i\{F(Z)-F(0)\}.$$

II. Anwendung dieser Integrale, um die Wurzeln von Gleichungen auszudrücken.

Nun sei eine Function $f(z)$ gegeben, die in einem Gebiet T auf die Form gebracht werden kann:

$$(z-Z_1)^{\mu_1}(z-Z_2)^{\mu_2}\dots(z-Z_\varrho)^{\mu_\varrho}f_1(z),$$

wo $f_1(z)$ im ganzen Gebiete T stetig, eindeutig, nullfrei ist, so dass in diesem Gebiete T auch $\log f_1(z)$ stetig und eindeutig ist. Wir dividiren die vorstehende Gleichung mit $z^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\varrho}$, nehmen an beiden Seiten die Logarithmen und multipliciren die Gleichung mit einer stetigen und eindeutigen Function $F'(z)$. Dies giebt:

$$\mu_1 F'(z)\log\left(1-\frac{Z_1}{z}\right)+\mu_2 F'(z)\log\left(1-\frac{Z_2}{z}\right)+\dots+\mu_\varrho F'(z)\log\left(1-\frac{Z_\varrho}{z}\right)$$
$$= F'(z)\log\frac{f(z)}{z^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\varrho}} - F'(z)\log f_1(z).$$

Diese Gleichung integriren wir über einen die Punkte $z=0$, $z=Z_1$, $z=Z_2$, ... $z=Z_\varrho$ umschliessenden, dem Gebiete T angehörigen in sich zurückkehrenden Weg. Nach dem Obigen folgt:

$$(5.)\quad \begin{cases}\mu_1 F(Z_1)+\mu_2 F(Z_2)+\dots+\mu_\varrho F(Z_\varrho)-(\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\varrho)F(0)\\ \qquad = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{z_0}^{z_0} F'(z)\log\left(\frac{f(z)}{z^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\varrho}}\right)dz,\end{cases}$$

da das Integral $\int_{z_0}^{z_0} F'(z)\log f_1(z)dz$ unter den über $F'(z)$ und $f_1(z)$ gemachten Voraussetzungen Null ist. Ganz ähnlich würden wir, wenn wir nicht mit $z^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\varrho}$ dividirt hätten, gefunden haben:

$$(6.)\quad \begin{cases}\mu_1 F(Z_1)+\mu_2 F(Z_2)+\dots+\mu_\varrho F(Z_\varrho)\\ = (\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\varrho)F(z_0) - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{z_0}^{z_0} F'(z)\log f(z)dz,\end{cases}$$

wo der Integrationsweg den Punkt $z = 0$ nicht zu umschliessen braucht. Lässt man den Integrationsweg ausgehen von einem Punkte, in dem $F(z)$ verschwindet, so ist einfach:

$$(7.)\quad \mu_1 F(Z_1)+\mu_2 F(Z_2)+\cdots+\mu_\varrho F(Z_\varrho) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0} F'(z)\log f(z)\,dz.$$

Durch partielle Integration kann man den Logarithmus unter dem Integralzeichen entfernen. Setzt man

$$\int_{z_0}^{z_0} F'(z)\log f(z)\,dz = \lim_{z=z_0}\left\{\Big|_{z_0}^{z} F(z)\log f(z) - \int_{z_0}^{z}\frac{F(z)f'(z)}{f(z)}\,dz\right\},$$

so lässt sich zeigen, dass

$$(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\varrho)F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\Big|_{z_0}^{z_0} F(z)\log f(z),$$

woraus dann folgt:

$$(8.)\quad \mu_1 F(Z_1)+\mu_2 F(Z_2)+\cdots+\mu_\varrho F(Z_\varrho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0}\frac{F(z)f'(z)}{f(z)}\,dz, \text{*)}$$

wie man auch ohne Weiteres direct findet, wenn man

$$f(z) = (z-Z_1)^{\mu_1}(z-Z_2)^{\mu_2}\dots(z-Z_\varrho)^{\mu_\varrho} f_1(z)$$

logarithmisch differentiirt, mit $F'(z)$ multiplicirt, und über einen die Punkte $z = Z_1, \dots\ z = Z_\varrho$ umschliessenden Weg integrirt.

III. Ueber die Anwendungen von Formel (8.).

Mit Hülfe von Formel (8.) kann man Wurzeln beliebiger Gleichungen, sobald man ungefähr den Ort der Wurzel kennt, und die Functionen F, f die ihnen auferlegten Bedingungen erfüllen, durch *einfache* Integrale ausdrücken. Diese Integrale sind aber von abschreckender Zusammengesetztheit. Sie enthalten, wenn man z. B. Kreise zu Integrationswegen wählt, zwischen gewissen Grenzen willkürliche Parameter, deren Veränderung auf den Werth des Integrals ohne Einfluss bleibt. Demnach sind diese einfachen Integrale im Grunde doch verkappte Doppelintegrale, und zwar von der Art, welche ich *Fourier*sche Doppelintegrale genannt habe, die nämlich von einer Integrationsgrenze unabhängig sind, eine Verwandtschaft, die auch *Jacobi* aufgefallen ist. (Dieses Journ. Bd. 2. pag. 7).

---

*) Diese Formel hat schon *Cauchy* gegeben, siehe *Valson*, „La vie et les travaux du Baron *Cauchy*," 2. Th., pag. 87.

Weiter kann die Formel (8.) zur Summation fast jeglicher Reihe dienen, und damit auch zur Auflösung von Differenzengleichungen. Aber nicht allein gelten hier die eben gemachten Bemerkungen über die Complication der Integrale, sondern es kommt noch eine Schwierigkeit hinzu. Wenn man z. B. die *unendliche* Reihe $F(1)+F(2)+\cdots$ dadurch summiren will, dass man $f(z)=\sin\pi z$ setzt, so hat man darauf zu sehen, dass der um alle Wurzeln von $\sin\pi z=0$ geführte Integrationsweg von

$$\int_{z_0}^{z_0}\frac{F(z)f'(z)}{f(z)}\,dz$$

ein *convergentes* Integral ergiebt.

Diese Bedingung zwingt häufig Integrationswege zu wählen, die das Integral noch viel complicirter machen. Um z. B. die Reihe

$$\frac{\sin\gamma}{1}+\frac{\sin 4\gamma}{4}+\frac{\sin 9\gamma}{9}+\cdots$$

zu summiren, hat man $f(z)=\sin\pi z$, $F(z)=\frac{\sin\gamma z^2}{z^2}$ zu setzen, und, wegen $F(z)=F(-z)$, z. B.:

$$\text{für } x>0,\quad y=\pm e^{-x}$$
$$\text{für } x<0,\quad y=\pm e^{x}$$

als Integrationsweg zu nehmen. Der Integrationsweg muss sich im Unendlichen ziemlich rasch der reellen Linie nähern. Setzt man $\zeta=x+ie^{-x}$, so findet man auf diese Weise:

$$\tfrac{1}{2}+\frac{\sin\gamma}{1}+\frac{\sin 4\gamma}{4}+\cdots=-\frac{1}{\pi}\mathfrak{J}\int_i^\infty\frac{\sin\zeta^2\gamma}{\zeta^2}\cot\zeta\pi\,d\zeta,$$

wo das Zeichen $\mathfrak{J}$ bedeutet, dass man den imaginären Theil der rechts davon stehenden Grösse zu nehmen hat. Vorstehende Reihe lässt sich übrigens auf anderem Wege viel leichter summiren.

IV. Die *Lagrange*sche Reihe als Consequenz von Formel (6.).

Unter älteren allgemeinen Formeln, welche den obigen Analoges leisten, ist die *Lagrange*sche Reihe die berühmteste. *Lagrange* fand, dass die Gleichung für z:

$$z-\zeta-\varphi(z)=0$$

eine Wurzel $z=Z$ habe, von der eine beliebige Function $F(Z)$ sich aus-

drücken lässt, wie folgt:

$$(12.)\quad F(Z) = F(\zeta)+F'(\zeta)\varphi(\zeta)+\frac{1}{1.2}\frac{dF'(\zeta)\varphi(\zeta)^2}{d\zeta}+\frac{1}{1.2.3}\frac{d^2F'(\zeta)\varphi(\zeta)^3}{d\zeta^2}+\cdots$$

Von älteren Versuchen abgesehen, hat vor einiger Zeit Hr. ***Rouché****) das *Lagrange*sche Ergebniss einer genaueren Prüfung unterworfen. Sein wichtigster Satz scheint mir aber nicht allgemein genug zu sein, und der Beweis dieses Satzes, der sich auf die Potenzentwickelung einer nicht eindeutigen Grösse und die Differentiation dieser Entwickelung stützt, scheint mir andere Beweismethoden wünschenswerth zu machen. Formel (6.) eignet sich dazu, die Grenzen der Gültigkeit der *Lagrange*schen Reihe und die Beschaffenheit ihrer Wurzeln mit aller Strenge festzustellen.

Es sei eine Gleichung $f(z) = 0$ gegeben, die wir uns in dieser Form

$$(13.)\quad f(z) \equiv z-\zeta-\varphi(z) = 0$$

geschrieben denken, wo ζ eine gewisse complexe Grösse vorstellt, die auch Null sein kann.

Wir machen folgende Annahmen.

1) Das Gebiet T, in welchem $\operatorname{mod}\frac{\varphi(z)}{z-Z} < 1$ ist, umschliesse den Punkt $z = Z$.

2) Im Gebiet T^*, das zu Begrenzungen nur die äusseren, nicht die inneren Begrenzungen von T hat, dem mithin der Punkt $z = Z$ angehört, ist $\varphi(z)$ stetig und eindeutig.

3) Die Function $F(z)$ ist im Gebiete T^* stetig und eindeutig.

Alsdann gilt der *Satz:*

Es liegt stets ein aber nur ein Wurzelpunkt im Gebiet T^* und zwar auf einer inneren Begrenzung von T. Nennen wir diesen Wurzelpunkt Z, so ist $\lim_{z=Z}\frac{z-\zeta-\varphi(z)}{z-Z}$ von Null und Unendlich verschieden, und man hat:

$$F(Z) = F(\zeta)+F'(\zeta)\varphi(\zeta)+\frac{1}{1.2}\frac{dF'(z)\varphi(\zeta)^2}{d\zeta}+\frac{1}{1.2.3}\frac{d^2F'(\zeta)\varphi(\zeta)^3}{d\zeta^2}+\cdots.$$

Beweis.

Formel (6.) lautet in unserem Fall:

$$(6^a.)\quad \begin{cases} \mu_1F(Z_1)+\mu_2F(Z_2)+\cdots+\mu_\varrho F(Z_\varrho) \\ = (\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\varrho)F(z_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0}F'(z)\log(z-\zeta-\varphi(z))\,dz. \end{cases}$$

*) Éc. Polytechn. Tome XXII., cah. 39, p. 193.

Wir schreiben das Integral rechter Hand, wie folgt:

$$(14.)\quad \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{z_0}^{z_0} F'(z)\log(z-\zeta-\varphi(z))\,dz = -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{z_0}^{z_0} F'(z)\log\Big(1-\dfrac{\varphi(z)}{z-\zeta}\Big)dz \\ \qquad\qquad -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{z_0}^{z_0} F'(z)\log(z-\zeta)\,dz \end{cases}$$

und drücken die beiden Integrale rechter Hand anders aus.

Was das zweite betrifft, so haben wir wegen Formel (3.):

$$(15.)\qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0} F'(z)\log(z-\zeta)\,dz = -\{F(z_0)-F(\zeta)\}.$$

Im ersten Integral

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0} F'(z)\log\Big(1-\frac{\varphi(z)}{z-\zeta}\Big)dz$$

können wir im Gebiete T den Logarithmus nach Potenzen von $\dfrac{\varphi(z)}{z-\zeta}$ entwickeln, wodurch es übergeht in:

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0} dz\,F'(z)\left\{\frac{\varphi(z)}{z-\zeta}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\varphi(z)}{z-\zeta}\Big)^2+\frac{1}{3}\Big(\frac{\varphi(z)}{z-\zeta}\Big)^3+\cdots\right\}.$$

Das Integralzeichen setzen wir vor jedes einzelne Glied der Reihe und wenden bei jedem einzelnen Gliede die Formel

$$\int_{z_0}^{z_0} \frac{\Phi(z)}{(z-\zeta)^n}\,dz = \frac{2\pi i}{\Pi(n-1)}\,\frac{d^{n-1}\Phi(\zeta)}{d\zeta^{n-1}}$$

an, deren bekannte Voraussetzungen, wenn $\Phi(z)$ successive gleich $F'(z)\varphi(z)$, $F'(z)\varphi(z)^2$, etc. angenommen wird, im Gebiet T^* zutreffen. Wir erhalten:

$$(16.)\quad \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{z_0}^{z_0} F'(z)\log\Big(1-\dfrac{\varphi(z)}{z-\zeta}\Big)dz \\ = F'(\zeta)\varphi(\zeta)+\dfrac{1}{1.2}\,\dfrac{dF'(\zeta)\varphi(\zeta)^2}{d\zeta}+\dfrac{1}{1.2.3}\,\dfrac{d^2F'(\zeta)\varphi(\zeta)^3}{d\zeta^2}+\cdots. \end{cases}$$

Nachdem wir so das Integral rechter Hand in (6^a.) umgeformt haben, geht (6^a.) über in:

$$(6^b.)\quad \begin{cases} \mu_1F(Z_1)+\mu_2F(Z_2)+\cdots+\mu_\varrho F(Z_\varrho) \\ = F(z_0)\{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\varrho-1\}+F(\zeta)+F'(\zeta)\varphi(\zeta)+\dfrac{1}{1.2}\,\dfrac{dF'(\zeta)\varphi(\zeta)^2}{d\zeta}+\cdots, \end{cases}$$

aus welcher Formel sich die Richtigkeit des behaupteten Satzes ohne Weiteres ergiebt. Denn erstens kommt der willkürliche Anfangswerth $F(z_0)$ nur im ersten Gliede rechter Hand vor, das demnach für sich Null sein muss,

woraus folgt:

$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\varrho = 1.$$

Zweitens sind die μ ganze Zahlen, da $z-\zeta-\varphi(z)$ im Gebiet T^* stetig, eindeutig ist, also sind die μ Null bis auf Eines, das gleich 1 ist. Drittens kann die Wurzel nur in der Grenze der Gebiete liegen, in denen $\mathrm{mod}\frac{\varphi(z)}{z-\zeta}$ kleiner und grösser als Eins ist, da, wenn wir die Wurzel Z nennen, $\frac{\varphi(Z)}{Z-\zeta}=1$ ist. Endlich ist wegen (6^b.):

$$F(Z) = F(\zeta)+F'(\zeta)\varphi(\zeta)+\frac{1}{1.2}\frac{dF'(\zeta)\varphi(\zeta)^2}{d\zeta}+\text{ etc.}$$

Q. E. D.

Bemerkungen. 1) Ganz in der nämlichen Weise wird man noch andere Wurzeln von $f(z)=0$ erhalten können. Wir geben dieser Gleichung die Form:

$$f(z) = (z-\zeta_1)^2-\varphi_1(z) = 0.$$

Durch den nämlichen Gedankengang wie oben findet man alsdann, dass im Gebiete T_1^*, das mit dem Gebiet $\mathrm{mod}\frac{\varphi_1(z)}{(z-\zeta_1)^2}<1$ die äusseren Begrenzungen gemein hat und den Punkt $z=\zeta_1$ enthält, zwei einfache oder eine Doppelwurzel $f(z)=0$ liegt, und nennt man diese Wurzeln Z_1, Z_2, so kann man $F(Z_1)+F(Z_2)$ durch eine Reihe ausdrücken. So kann man leicht den obigen Satz immer mehr verallgemeinern, wie übrigens schon Herr *Rouché* gezeigt hat.

2) Im Falle die dem obigen Satze zu Grunde liegende Annahme, dass $\varphi(z)$ im Gebiete T^* eindeutig sei, nicht erfüllt ist, gestalten sich die Dinge verwickelter. In besonderen Fällen, wie für $f(z)=\sqrt{1-z^2}$, $\zeta=0$, wo also $\frac{\varphi(z)}{z}=1-\sqrt{1-z^{-2}}$, erhält man in der That $\mu_1+\mu_2=1$ und $\mathrm{mod}\, z=\infty$ als äussere Grenze des Gebiets $\mathrm{mod}\frac{\varphi(z)}{z}<1$, auch ist hier die Umformung (16.) und die Entwickelung von $\frac{1}{2}F(+1)+\frac{1}{2}F(-1)$ nach der *Lagrange*schen Reihe gestattet, eine weitere Untersuchung dieser Verhältnisse habe ich indessen nicht angestellt.

3) Wie man aus dem obigen Theorem ersieht, beruht die Möglichkeit der Entwickelung einer bestimmten Wurzel einer Gleichung $f(z)=0$ in die *Lagrange*sche Reihe darauf, dass für diese Wurzel eine Grösse ζ gefunden werde, der Art, dass das Gebiet, in dem $\mathrm{mod}\left(1-\frac{f(z)}{z-\zeta}\right)<1$ ist, den fraglichen Wurzel-

punkt vollständig umgebe. Wenn für einen Wurzelpunkt Z überhaupt ein solcher Punkt ζ existirt, so wird es nicht bloss einen solchen Punkt ζ geben, sondern ein ganzes Gebiet, in dem der Punkt ζ beliebig gewählt werden darf. So gehört dann zu jedem Wurzelpunkt ein Gebiet ζ. Nehmen wir z. B. $f(z) = \Sigma a_p z^p$ an, so würde die fernere Theorie der *Lagrange*schen Reihe sich zunächst zu beschäftigen haben mit der Frage: *Welches sind die Begrenzungen der durch die Wurzeln einer algebraischen Gleichung bestimmten Gebiete* ζ*?* Diese Frage wird gegenwärtig hier untersucht.

V. Beziehung zwischen den obigen Formeln und den Formeln von *Parceval, Jacobi, Cauchy.*

Marc-Antoine Parceval *) scheint zuerst allgemeine Formeln aufgestellt zu haben, welche Wurzeln von Gleichungen in Form von bestimmten Integralen ausdrücken. Wenngleich seine Formeln ohne directe Anwendung geblieben sind, so haben sie doch den Nutzen gehabt, die Mathematiker zu interessiren, und weitere zum Theil sehr merkwürdige Untersuchungen hervorzurufen, wie denn die Rolle, welche in *Parcevals* Formeln das imaginäre Symbol spielt, Einfluss auf die Richtung der *Cauchy*schen Arbeiten gehabt haben soll.

Parceval summirt die *Lagrange*sche Reihe, wie folgt. Die nach x aufzulösende Gleichung sei $\alpha - x + \varphi(x) = 0$, und p sei die durch die *Lagrange*sche Reihe ausgedrückte Wurzel der Gleichung, so dass:

$$p - \alpha = \varphi(\alpha) + \frac{1}{1.2}\frac{d\varphi(\alpha)^2}{d\alpha} + \cdots.$$

Er geht von der leicht zu verificirenden Bemerkung aus, dass die Grösse $-s\log\left\{1 - \frac{1}{s}\varphi(\alpha+s)\right\}$ nach steigenden und fallenden Potenzen von s entwickelt als von s unabhängiges Glied die *Lagrange*sche Reihe rechter Hand in vorstehender Formel hat. Setzt man nun in:

$$-s\log\left\{1 - \frac{1}{s}\varphi(\alpha+s)\right\} = A_0 + A_1 s + \cdots \\ + B_1 s^{-1} + \cdots$$

$\cos v + i\sin v$ statt s, so wird der reelle Theil der Reihe rechter Hand:

$$A_0 + (A_1+B_1)\cos v + (A_2+B_2)\cos 2v + \cdots$$

---

*) Mémoires des Savans étrangers 1806.

und giebt von 0 bis π integrirt πA_0. Setzen wir daher $\cos v + i \sin v = V_1$, $\cos v - i \sin v = V_2$, so wird:

$$(17.)\qquad -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi dv \left\{ V_1 \log\left(1 - \frac{1}{V_1}\varphi(\alpha + V_1)\right) + V_2 \log\left(1 - \frac{1}{V_2}\varphi(\alpha + V_2)\right)\right\} = p - \alpha$$

sein, welches die *Parcevalsche* Formel ist. Es ist leicht zu sehen, dass sie eine Consequenz ist von Formel (5.):

$$F(Z) - F(0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0} F'(z) \log\left(\frac{f(z)}{z}\right) dz,$$

in der ich gleich $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu_3 = \ldots = 0$ angenommen habe. Denn setzt man darin $F(z) = z$, $f(z) = z - \varphi(\alpha + z)$ und integrirt über einen Kreis mit dem Halbmesser 1 und dem Mittelpunkt $z = 0$, so wird die vorstehende Formel:

$$Z = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(1 - \frac{\varphi(\alpha + \cos v + i \sin v)}{\cos v + i \sin v}\right)\{\cos v + i \sin v\} dv.$$

Diese Formel geht, wenn man

$$\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \log\left(1 - \frac{\varphi(\alpha + V_1)}{V_1}\right) V_1 dv = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \log\left(1 - \frac{\varphi(\alpha + V_2)}{V_2}\right) V_2 dv$$

und $Z = p - \alpha$ setzt, in die *Parcevalsche* Formel (17.) über. Er giebt ihr noch eine andere Gestalt, indem er die Functionen $\frac{\varphi(\alpha + V_1)}{V_1}$, $\frac{\varphi(\alpha + V_2)}{V_2}$ in den Logarithmen und dann die Logarithmen selbst in ihre reellen und imaginären Theile zerlegt. In dieser Gestalt ist dann die *Parcevalsche* Formel auf strengere und allgemeinere Weise von *Jacobi* *) abgeleitet worden. Die *Parcevalsche* Formel, so wie sie eben hergeleitet wurde, hat nämlich nicht allein dieselben Mängel wie die *Lagrangesche* Reihe bei ihrer ursprünglichen Herleitung, dass man in der That nicht weiss, ob man eine Wurzel und welche man durch sie erhält: Ausserdem setzt die *Parcevalsche* Formel noch voraus, dass im Kreise mit dem Halbmesser Eins und dem Mittelpunkt $z = 0$ eine Wurzel liege, da sie nur in diesem Falle die Summe der *Lagrangeschen* Reihe ist.

Jacobis Entwickelung ist von der *Lagrangeschen* Reihe unabhängig. Sie beruht auf der Vergleichung der Coefficienten der Entwickelungen einer Function nach Potenzen und nach *Fourierschen* Reihen. Entwickelt man $\varphi(r.e^{iv})$ einmal nach Potenzen von $r.e^{iv}$ (zwischen den Grenzen von r, zwischen

---

*) Dieses Journ. 2. Bd., pag. 1.

denen die Entwickelung legitim ist), das andere Mal nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von v, schreibt $r^n(\cos nv + i\sin nv)$ statt $r^n.e^{inv}$ in der Potenzentwickelung, so kann man die Integrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(r.e^{iv}) \cos nv\, dv, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(r.e^{iv}) \sin nv\, dv,$$

welche als Coefficienten der *Fourier*schen Entwickelung von $\varphi(r.e^{iv})$ auftreten, durch Gleichsetzung der Coefficienten von $\cos nv$, $\sin nv$ in der Potenzentwickelung und in der *Fourier*schen Entwickelung bestimmen. Nun sei die aufzulösende Gleichung:

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + x^p = 0,$$

und α', α'', ... $\alpha^{(p)}$ seien ihre nach der Grösse der Moduln geordneten Wurzeln. Alsdann ist

$$\log\varphi(x) = \log(x-\alpha') + \log(x-\alpha'') + \cdots + \log(x-\alpha^{(p)}).$$

Hierin $x = r.e^{iv}$ gesetzt, kann man im Falle

$$\text{mod.}\,\alpha^{(k)} < r < \text{mod.}\,\alpha^{(k+1)}$$

die Logarithmen rechter Hand bis incl. $\log(x-\alpha^{(k)})$ nach fallenden und die übrigen nach steigenden Potenzen von x, die Grösse linker Hand und den imaginären Theil des rechts restirenden $\log x$ aber in eine Sinus-Cosinus-Reihe entwickeln und die angedeutete Vergleichung der Coefficienten vornehmen. Setzen wir $\varphi(r.e^{iv}) = U + Vi$, so entwickelt *Jacobi* indessen nicht $\log(U+Vi)$ sondern, $\varphi(\alpha)$ als reell vorausgesetzt, die Grössen:

$$\log\varphi(r.e^{iv}) + \log\varphi(r.e^{-iv}) = \log(U^2+V^2),$$

$$\frac{1}{2i}(\log\varphi(r.e^{iv}) - \log\varphi(r.e^{-iv})) = \operatorname{arctg}\frac{V}{U}.$$

Die Vergleichung der Coefficienten dieser zwei Paare von Entwickelungen führt schliesslich zu den *Jacobi*schen Formeln:

$$(18.)\begin{cases} \alpha'^n + \alpha''^n + \cdots + \alpha^{(k)n} = (-1)^n k r^n + \dfrac{nr^n}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\sin nv \operatorname{arctg}\frac{V}{U} - \cos nv \log\sqrt{U^2+V^2}\right\}dv, \\[2ex] \dfrac{1}{\alpha^{(k+1)n}} + \dfrac{1}{\alpha^{(k+2)n}} + \cdots + \dfrac{1}{\alpha^{(p)n}} = (-1)^n\dfrac{p-k}{r^n} - \dfrac{n}{2\pi r^n}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\sin nv \operatorname{arctg}\frac{V}{U} + \cos nv \log\sqrt{U^2+V^2}\right\}dv. \end{cases}$$

(In der zweiten Formel fehlt l. c. pag. 6 im ersten Gliede rechts das p, welches ich wiederhergestellt habe.)

Beide Formeln (18.) ergeben sich mit Leichtigkeit aus Formel (6.):

$$\mu_1 F(Z_1) + \mu_2 F(Z_2) + \cdots + \mu_\varrho F(Z_\varrho) = (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\varrho) F(z_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0} F'(z) \log f(z)\, dz,$$

wo im Gebiet der Integration rechter Hand $F(z)$, $f(z)$ stetig, eindeutig sind und das Gebiet den Punkt $z=0$ nicht zu enthalten braucht.

Setzen wir in Formel (6.):

$f(z)=a+bz+\cdots+z^p=U+Vi,\quad F(z)=z^n,\quad \varrho=k,\quad \mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_\varrho=1,$

$Z_1=\alpha'$, $Z_2=\alpha''$, ... $Z_\varrho=\alpha^{(k)}$, $z_0=-r$, und integriren über einen Kreis mit dem Mittelpunkt $z=0$ und dem Radius r, so wird aus (6.) zunächst:

$$\alpha'^n+\alpha''^n+\cdots+\alpha^{(k)^n}=k(-r)^n-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{+\pi} nr^{n-1}e^{(n-1)iv}.\log(U+iV)re^{iv}idv.$$

Durch Trennung des Reellen vom Imaginären wird das Integral rechter Hand:

$$(19.)\quad \begin{cases}\frac{nr^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}dv\Big\{\sin nv\operatorname{arctg}\frac{V}{U}-\cos nv\log\sqrt{U^2+V^2}\\ \qquad\qquad -i\Big(\sin nv\log\sqrt{U^2+V^2}+\cos nv\operatorname{arctg}\frac{V}{U}\Big)\Big\}.\end{cases}$$

Unter der Voraussetzung, dass die α reell oder nur conjugirt imaginär sind, muss der imaginäre Theil des Integrals verschwinden, wodurch man die erste *Jacobi*sche Formel erhält. Um die zweite zu finden, wählen wir zum Integrationsweg in (6.) zwei um $z=0$ concentrische Kreise mit den Radien r und $R>r$, die durch eine (zweimal in entgegengesetzter Richtung zu durchlaufende) Gerade verbunden sind. Ferner setzen wir $F(z)=z^{-n}$, $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_\varrho=1$, $\varrho=p-k$, $Z_1=\alpha^{(k+1)}$, ... $Z_\varrho=\alpha^{(p)}$, $z_0=-r$. Alsdann folgt unter der Annahme $R>\text{mod.}\,\alpha^{(p)}$ aus (6.):

$$\frac{1}{(\alpha^{(k+1)})^n}+\cdots+\frac{1}{(\alpha^{(p)})^n}=\frac{p-k}{(-r)^n}-\mathfrak{Z}_r+\mathfrak{Z}_R,$$

wo $\mathfrak{Z}_r$ aus (19.) erhalten wird durch Vertauschung von n mit $-n$. Das negative Zeichen hat $\mathfrak{Z}_r$, weil jetzt der Kreis mit dem Radius r in entgegengesetzter Richtung wie bei Ableitung der ersten Formel durchlaufen wird, da er die innere Begrenzung des Wurzelgebiets bildet. $\mathfrak{Z}_R$ folgt aus (19.) durch Vertauschung von r mit R und n mit $-n$. Lässt man R unendlich werden, so sieht man, dass $\mathfrak{Z}_R$ verschwindet, so dass durch Fortlassen des imaginären Theils von $\mathfrak{Z}_r$ sich die zweite Gleichung (18.) ergiebt.

Wir wollen schliesslich noch einige Formeln betrachten, die von *Cauchy* herrühren und typisch für mehrere von verschiedenen Autoren publicirte Formeln sind. Sie sind besondere Fälle von Formel (8.). Es sind die Formeln (22.), (23.), (24.) in den Observations zu seinem „Mémoire sur l'intégration

des équations linéaires," Ec. pol. XII. Bd. pag. 580. Seine Ableitung dieser Formeln stützt sich auf die intégrales singulières (d. i. Doppelintegrale über ein Gebiet mit einer endlichen und einer unendlich kleinen Dimension), und lässt sich nicht kurz darstellen. Formel (23.) l. c. lautet:

$$(20.)\quad \begin{cases} \varphi(x_0)+\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_{m-1}) \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{v'}^{v''}[f(u''+vi)-f(u'+vi)]\,dv+\frac{i}{2\pi}\int_{u'}^{u''}[f(u+v''i)-f(u+v'i)]\,du, \end{cases}$$

wo

$$f(x) = \frac{\varphi(x)F'(x)-\omega(x)F(x)}{F(x)}$$

ist, und die Functionen $F(x)$, $\varphi(x)$, $\omega(x)$ und die Grössen $x_0, \dots x_{m-1}$ folgende Bedeutung haben. In der heutigen Ausdrucksweise sind $F(x)$, $\varphi(x)$, $\omega(x)$ im rechteckigen Gebiet, das von den Geraden $x=u'$, $x=u''$, $y=v'$, $y=v''$ ($u''>u'$, $v''>v'$) eingeschlossen ist, stetig, eindeutig, und $x_0, \dots x_{m-1}$ sind die Wurzeln von $F(x)$ in diesem Gebiet. Alsdann ist über die Begrenzung des Rechtecks genommen offenbar $\int f(z)\,dz = \int\varphi(z)\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz$. Die rechte Seite in (20.) erhält man aus dem Integral rechts in (8.):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0}\frac{F(z)f'(z)}{f(z)}\,dz$$

unter Voraussetzung jenes rechteckigen Integrationsweges, und wenn man $\varphi(z)$ statt $F(z)$, $F(z)$ statt $f(z)$ schreibt. Die übrigen von *Cauchy* l. c. mitgetheilten Formeln, sowie ähnliche von anderen Autoren unterscheiden sich von (20.) nur durch den Integrationsweg.

Freiburg i. Br., October 1871.

Théorème général concernant la grandeur relative des infinis des fonctions et de leurs dérivées.

(Par. M. *P. du Bois-Reymond* à Fribourg-en-Brisgau.)

Aux observations sur les *types infinitaires* des fonctions que j'ai communiquées dans le second article du mémoire: *Sur la grandeur relative des infinis des fonctions* (Annali di Matematica, Tom. IV. pag. 338) j'en ajouterai quelques-unes, qui serviront à compléter la théorie de ces types. De cette théorie résulte finalement un théorème très-général (No. 6) qui établit comment une seule fonction v, vérifiant les relations $\lim \frac{v^M}{f(x)} = \lim \frac{f(x)}{v^m} = \infty$, régit les infinis de toutes les dérivées de la fonction $f(x)$ pour $x = \infty$, supposé que ces dérivées n'aient pas un nombre infini de maxima et minima.

1. Énumération des notations et expressions employées dans ce mémoire.

Conformément au mémoire cité les notations $f(x) > \varphi(x)$, $f_1(x) \sim \varphi_1(x)$, $f_2(x) < \varphi_2(x)$ signifient que les rapports $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$, $\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}$ ont pour $x = \infty$ respectivement une limite infinie, finie, zéro, sans savoir égard au signe.

Les fonctions f et φ devenant infinies pour $x = \infty$, on dira que $f(x)$ a un infini supérieur, égal, inférieur à celui de $\varphi(x)$, selon que $f(x) \underset{<}{\overset{>}{\sim}} \varphi(x)$. Et si f et φ s'annulent pour $x = \infty$, on dira encore que le zéro de f est ou supérieur ou égal, ou bien inférieur à celui de $\varphi(x)$ suivant que l'on trouve $f(x) \underset{<}{\overset{>}{\sim}} \varphi(x)$.

Enfin, quand pour deux fonctions $f(x)$ et $v = v(x)$, qui deviennent infinies à la limite $x = \infty$, on a $v^M > f(x) > v^m$, la fonction $t = \frac{1}{\frac{dlv}{dx}}$ sera appelé le *type infinitaire* de $f(x)$, qui, comme nous l'avons démontré, jouit de la propriété caractéristique:

$$tf'(x) \sim f(x).$$

Il va sans dire que les notations $>$ $<$ conservent leur valeur quand une des fonctions séparées par ces signes a une limite finie, et la notation $\backsim$, quand les deux fonctions qu'elle sépare ont une limite finie: Mais alors il ne pourra plus être question d'infinis ou de zéros plus grands ou moins grands.

2. Rapport entre les types des fonctions à limite infinie et à limite zéro.

Si dans le mémoire cité nous ne nous sommes guère occupé que de fonctions à limite infinie, il est pourtant évident que tous les théorèmes sur les types que nous y avons proposés, sont également applicables aux cas où les fonctions séparées par les signes $> \backsim <$ s'annulent pour $x = \infty$.

Soit en effet t_0, t_1, ... la série de tous les types de toutes les fonctions qui deviennent infinies pour $x = \infty$, il faudra de même considérer ... t_1, t_0 comme la série des types de toutes les fonctions qui s'annulent pour $x = \infty$. Car si $v^M > f(x) > v^m$, on aura toujours une fonction correspondante $f_1(x) = \frac{1}{f(x)}$ qui satisfait à l'inégalité $v^{-M} < f_1(x) < v^{-m}$. Et alors en posant $t = \frac{1}{\frac{dlv}{dx}}$, on a en même temps $tf'(x) \backsim f(x)$ et $tf_1'(x) \backsim f_1(x)$; parce que cette dernière égalité, qui peut s'écrire $-t\frac{f'(x)}{f(x)^2} \backsim \frac{1}{f(x)}$, se transforme, par un changement de signe et en la multipliant par $f(x)^2$, en $tf'(x) \backsim f(x)$. De même aux fonctions à limite zéro correspondent les fonctions à limite infinie.

3. Considérations générales sur les infinis des fonctions correspondant à des types donnés.

Entre les valeurs infinitaires (pour $x = \infty$) des types et celles des fonctions correspondantes il est facile de constater les rapports que voici.

Les types ayant des limites finies ou s'annulant pour $x = \infty$, les fonctions correspondantes auront toujours des infinis égaux ou supérieurs à celui de $e^{\mu x}$, ou bien des zéros égaux ou inférieurs à celui de $e^{-\mu x}$, μ étant supposé aussi petit qu'on voudra.

Pour tout le reste des fonctions les types deviennent infinis. Or les fonctions ayant des types à limite infinie sont de deux espèces, ce qu'il importe de distinguer nettement.

Supposons que les types satisfassent à l'inégalité infinitaire

$$\text{const.} < t \underset{\sim}{<} x\,lx\,l_2x \ldots l_n x^{\mu}.$$

Si l'on fait:

$$\frac{1}{\frac{dlv}{dx}} = x\,lx\,l_1x \ldots l_n x^{\mu},$$

on trouve en intégrant:

$$v = e^{\frac{(l_n x)^{1-\mu}}{1-\mu}}$$

et pour $\mu = 1$:

$$v = e^{l_{n+1}(x)}.$$

Une fonction $f(x)$ qui satisfait à $v^M > f(x) > v^m$ ou bien à $v^{-m} > f(x) > v^{-M}$, aura donc une limite infinie ou zéro pour $\mu \leqq 1$, et une limite finie pour $\mu > 1$.

Soit en particulier:

$$t \underset{\sim}{>} x^{1+\nu},$$

ν étant imaginé aussi petit qu'on voudra, les fonctions correspondantes auront toujours une limite finie. Car de

$$\frac{1}{\frac{dlv}{dx}} = x^{1+\nu}$$

on tire

$$v = e^{-\frac{x^{-\nu}}{\nu}}.$$

4. Sur la différentiation des inégalités infinitaires.

L'algorithme des inégalités infinitaires admet différentes transformations, qui en font un instrument commode de calcul. Nous rappelons d'abord la multiplication et la division des inégalités, et ensuite leur *réduction*, qui revient à retrancher des deux expressions séparées par un des signes $> \sim <$ certaines fonctions superflues. Par exemple, quand on a $F(x) \sim \varphi(x)f(x) + \psi(x)$, où $\psi(x) < f(x)$ et où $\varphi(\infty)$ est finie, cette égalité s'écrira simplement $F(x) \sim f(x)$. A ces transformations ajoutons la différentiation des inégalités infinitaires, qui est permise d'après le théorème suivant:

Théorème. *Lorsque les fonctions continues $f(x)$, $\varphi(x)$ n'ont point de limite finie différente de zéro, et que ni ces fonctions ni leurs dérivées n'ont un nombre infini de maxima et de minima, on aura toujours:*

$$\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \text{etc. in inf.}$$

Démonstration. Soit d'abord $f(x) \sim \varphi(x)$, et soit t le type de $f(x)$, il sera nécessairement aussi le type de $\varphi(x)$, donc $f'(x) \sim \varphi'(x)$. Soit en second lieu $f(x) > \varphi(x)$. En différentiant l'égalité: $f(x) \sim \varphi(x).\psi(x)$, où $\psi(x) > 1$, on obtient:

$$f'(x) \sim \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x).$$

Si $\varphi(x)\psi'(x) > \varphi'(x)\psi(x)$, on a évidemment $f'(x) > \varphi'(x)\psi(x)$, et $f'(x) > \varphi'(x)$. Si $\varphi'(x)\psi(x) > \varphi(x)\psi'(x)$, on trouve encore $f'(x) > \varphi'(x)$. Si enfin $\varphi'(x)\psi(x) \sim \varphi(x)\psi'(x)$, ces deux quantités étant positives, on aura toujours $f'(x) > \varphi'(x)$. Mais si $\varphi'(x)\psi(x)$ est négative, il faut supposer $f(x) < 1$. Car alors on pourra faire $\varphi = v^{-M}\varphi_1$, $\psi = v^m\psi_1$, φ_1, ψ_1 et $\varphi_1\psi_1$ ayant des infinis inférieurs à celui d'une puissance de v, et il est facile de reconnaître que l'inégalité $f'(x) > \varphi'(x)$, qui se transforme en $\frac{d}{dx}v^{-M+m}\varphi_1\psi_1 > \frac{d}{dx}v^{-M}\varphi_1$, a lieu, parce que les infinis de v', φ_1', ψ_1' restent inférieurs à celui d'une puissance de v (Théor. 14, 15 du Mém. cité). Si au contraire $f(x) \sim 1$, le théorème n'a plus lieu, comme par exemple pour $1+\frac{1}{x} > \frac{1}{\log x}$. Pour déterminer la valeur de $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, quand $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \psi(x)$ a une limite finie, faisons:

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \psi(x)\left(1+\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right).$$

Posons $\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \chi(x)$, et $\log\varphi(x)+c = \int\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\frac{dx}{\chi(x)}$. Cette équation est absurde, si $\chi(x)$ ne s'évanouit pas à la limite, car alors l'intégrale qui forme le second membre serait convergente pour $x = \infty$, tandis que pour $\varphi(x) \gtrless 1$, le premier membre serait infini à la limite. On a donc $\chi(x) < 1$, et $\lim\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \psi(\infty)$.

C. Q. F. D.

Remarque. La théorie des types est en réciprocité avec la différentiabilité des inégalités infinitaires. Car en supposant celle-ci dé-

montrée *), on en conclut facilement le théorème principal des types. Soit en effet:

$$v^\mu f_1(x) \sim f(x),$$

$f_1^{\pm 1}(x)$ ayant un infini moindre qu'une puissance de v. En prenant des deux côtés les logarithmes et en réduisant, il vient

$$lv \sim lf(x),$$

et en différentiant $\frac{dlv}{dx} \sim \frac{f'(x)}{f(x)}$. Multipliant ensuite par $f(x)$ et divisant par $\frac{dlv}{dx}$ on obtient:

$$\frac{1}{\frac{dlv}{dx}} f'(x) \sim f(x).$$

5. Sur les fonctions à limite finie.

Remarquons d'abord que $\lim v$ étant finie, à cause du sens attaché aux signes $>$ $\sim$, on ne pourra plus écrire $v^M > f(x) > v^m$. Plutôt on aurait $v^M \sim f(x) \sim v^m$, mais cette formule ne serait d'aucune valeur dans ce cas, parce qu'elle ne servirait plus à distinguer les fonctions. Néanmoins l'égalité $tf'(x) \sim f(x)$, ou ce qui est ici la même chose: $tf'(x) \sim 1$, déterminerait encore le type t, et resterait propre à distinguer les fonctions. Aussi le théorème du no. 6 de ce mémoire s'étend-il aux fonctions à limite finie, comme l'on s'en assurera par la démonstration que nous en donnerons.

Mais pour chaque fonction $f(x)$ à limite finie il en existe bien sûrement une

---

*) Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ s'évanouissent pour $x = 0$, et que $f^{(m)}(x)$, $\varphi^{(m)}(x)$ soient leurs premières dérivées qui ne s'annulent pas à la limite, on peut aisément démontrer la formule $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(m)}(0)}{\varphi^{(m)}(0)}$ au moyen du reste de *Lagrange*, comme l'a fait voir *Cauchy*. Et cette formule sert de base aux formules semblables pour $x = \infty$ et pour les rapports de fonctions à limite infinie. Mais quand les dérivées ne cessent de s'annuler ou de devenir infinies à la limite, on ne pourra plus démontrer de cette manière $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f^{(m)}(x)}{\varphi^{(m)}(x)}$. Car supposons par exemple que les dérivées de $f(x)$ et de $\varphi(x)$ s'évanouissent à la limite. On pourra écrire

$$f(x) = \frac{x^m}{\Pi m} f^{(m)}(\xi), \quad 0 < \xi < x,$$

$$\varphi(x) = \frac{x^m}{\Pi m} \varphi^{(m)}(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < x \quad \text{et} \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(m)}(\xi)}{\varphi^{(m)}(\xi_1)}.$$

Or de cette expression on ne pourra pas conclure $\lim \frac{f^{(m)}(\xi)}{\varphi^{(m)}(\xi_1)} = \lim \frac{f^{(m)}(x)}{\varphi^{(m)}(x)}$, parce qu'on ne connaît pas la vitesse relative avec laquelle ξ et ξ_1 s'approchent de leur limite.

autre v qui lui est caractéristique, parfaitement comme les fonctions v définies dans le numéro 1 caractérisaient les fonctions $f(x)$ à limite infinie ou zéro. En effet, la fonction v définie jusqu'à présent par l'inégalité $v^M > f(x) > v^m$, mesure la vitesse avec laquelle $f(x)$ s'approche de sa limite nulle ou infinie. Nommons donc, quand $\lim f(x)$ est finie, v la fonction qui mesure la vitesse avec laquelle $f(x)$ s'approche de sa limite finie. On aura ainsi, pour définir v, l'inégalité:

$$v^M > f(x) - f(\infty) > v^m.$$

Il s'agit maintenant d'établir un rapport entre le type t satisfaisant à $tf'(x) \backsim 1$, et le type T vérifiant l'égalité $Tf'(x) \backsim f(x)-f(\infty)$, ou bien entre l'un de ces types et la fonction v. En divisant l'une par l'autre les égalités:

$$Tf'(x) \backsim f(x)-f(\infty),$$
$$tf'(x) \backsim 1,$$

on obtient:

$$\frac{T}{t} \backsim f(x)-f(\infty),$$

et en différentiant

$$\frac{d\frac{T}{t}}{dx} \backsim f'(x) \backsim \frac{1}{t}$$

ou bien $t\dfrac{d\frac{T}{t}}{dx} \backsim 1$. Cette égalité infinitaire équivaut à l'équation

$$t\frac{d\frac{T}{t}}{dx} = \psi(x),$$

$\psi(x)$ désignant une fonction à limite finie. Quand pour un t donné on voudra trouver T ou vice versa, on pourra faire $\psi(x) = 1$, et par conséquent

$$T = t\int_x^\infty \frac{dx}{t}, \quad t = Te^{\int^x \frac{dx}{T}},$$

les limites des intégrales étant prises de manière que $T < t$. Enfin puisqu'on a $T = \dfrac{1}{\frac{dlv}{dx}}$, on a aussi la relation cherchée entre t et v.

Soit par exemple $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, on trouve $t = x^2$, donc

$$T = x^2\int_x^\infty \frac{dx}{x^2} = -x,$$

ce qui est exact, car $x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ a une limite finie, et de $x^2f'(x) \sim x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ on tire, en divisant par x, $xf'(x) \sim e^{\frac{1}{x}}-1$.

Faisant encore $f(x)=1+\frac{1}{xlx}$, il est facile de voir qu'on a $x^2lxf'(x) \sim 1$, $xf'(x) \sim f(x)-f(\infty)$. En introduisant les deux valeurs $t=x^2lx$, $T=x$ dans l'équation $t\frac{d\frac{T}{t}}{dx}=\psi(x)$, on trouve $x^2lx\frac{lx+1}{x^2l^2x}=1+\frac{1}{lx}=\psi$. Donc $\psi(x)$ a la limite 1.

6. Théorème sur le rapport entre l'infini d'une fonction et les infinis de toutes ses dérivées.

Ce théorème distingue les trois cas $t<x$, $t>x$, $t\sim x$.

1) *Pour* $t<x$, *on a:*

$$f(x)\sim tf'(x)\sim t^2f''(x)\sim \text{ etc. in inf.}$$

2) *Pour* $t>x$, *on a*:

$$f(x)\sim f'(x)\frac{1}{t^{-1}}\sim f''(x)\frac{1}{\frac{dt^{-1}}{dx}}\sim f'''(x)\frac{1}{\frac{d^2t^{-1}}{dx^2}}\sim \text{ etc. in inf.}$$

3) *Soit* $t\sim x$. *On pourra mettre* $f(x)$ *sous la forme* $x^\mu f_1(x)$ (Théor. 8 et 10 du Mém. cit.), *où* $f_1(x)$ *ou bien* $\frac{1}{f_1(x)}$ *a un infini moindre qu'une puissance quelconque de* x. *Il y a ici encore deux cas à distinguer. Si* μ *n'est pas un entier, on aura comme pour* $t<x$:

$$f(x)\sim tf'(x)\sim t^2f''(x)\sim \text{ etc. in inf.}$$

Si au contraire μ *est un entier, en nommant* t_1 *le type de* $f_1(x)$, *on a:*

$$f(x)\sim tf'(x)\sim t^2f''(x)\ldots\sim t^\mu f^{(\mu)}(x)\sim t^\mu t_1 f^{(\mu+1)}(x)$$

$$\sim t^\mu\frac{1}{\frac{dt_1^{-1}}{dx}}f^{(\mu+2)}(x)\sim t^\mu\frac{1}{\frac{d^2t_1^{-1}}{dx^2}}f^{(\mu+3)}(x)\sim \text{ etc. in inf.}$$

Démonstration. Nous démontrerons d'abord et simultanément les deux premières parties du théorème, et ensuite la troisième.

En premier lieu, la différentiation de $f'(x)\sim f(x)\frac{1}{t}$ donne:

$$f''(x)\sim f'(x)\frac{1}{t}-f(x)\frac{t'}{t^2}.$$

Au lieu de $f'(x)$ écrivons $f(x)\frac{1}{t}\cdot$ Nous aurons donc:

$$f''(x) \backsim f(x)\frac{1}{t^2} - f(x)\frac{t'}{t^2}\cdot$$

D'après le théorème 3. du mémoire cité, selon que $t \lessgtr x$, on a $\lim t' = \frac{0}{\infty}$. Donc pour $t < x$ on trouve

$$f(x)\frac{1}{t^2} > f(x)\frac{t'}{t^2}$$

et par conséquent

$$t^2 f''(x) \backsim f(x).$$

Pour $t > x$ on trouve au contraire

$$f(x)\frac{t'}{t^2} > f(x)\frac{1}{t^2},$$

d'où l'on tire:

$$f''(x)\frac{1}{\frac{dt^{-1}}{dx}} \backsim f(x).$$

En second lieu, t étant supposé premièrement $< x$, la différentiation de $f''(x) \backsim f(x)t^{-2}$ donne au moyen du même raisonnement

$$t^3 f'''(x) \backsim f(x).$$

Pour $t > x$, la différentiation de $f''(x) \backsim f(x)\frac{t'}{t^2}$ donne:

$$f'''(x) \backsim f'(x)\frac{t'}{t^2} + f(x)\frac{t''t - 2t'^2}{t^3}\cdot$$

Au lieu de $f'(x)$ écrivons $\frac{1}{t}f(x)$. A cause de

$$f(x)\frac{t'}{t^3} < f(x)\frac{t'^2}{t^3}$$

cette égalité se simplifie ainsi:

$$f'''(x) \backsim f(x)\frac{d^2t^{-1}}{dx^2},$$

d'où:

$$f'''(x)\frac{1}{\frac{d^2t^{-1}}{dx^2}} \backsim f(x).$$

En différentiant troisièmement $f'''(x) \backsim f(x)\frac{1}{t^3}$ on trouve $t^4 f^{\text{IV}}(x) \backsim f(x)$,

etc. En différentiant $f'''(x) \sim f(x)\frac{d^2t^{-1}}{dx^2}$, on trouve d'abord:

$$f^{\text{IV}}(x) \sim f'(x)\frac{d^2t^{-1}}{dx^2}+f(x)\frac{d^3t^{-1}}{dx^3}.$$

Or $f'(x)\frac{d^2t^{-1}}{dx^2} \sim f(x)\frac{1}{t}\frac{d^2t^{-1}}{dx^2}$ peut être négligé relativement à $f(x)\frac{t'}{t}\frac{d^2t^{-1}}{dx^2}$, qui constitue une partie de $\frac{d^3t^{-1}}{dx^3}$, de là $f^{\text{IV}}(x)\frac{1}{\frac{d^3t^{-1}}{dx^3}} \sim f(x)$, etc. Et voilà démontrées les deux premières parties du théorème.

Dans l'hypothèse $t \sim x$, il faut que $f(x)$ soit de la forme $x^\mu f_1(x)$, où $f_1(x)$ ou bien sa réciproque $\frac{1}{f_1(x)}$ a un infini moindre qu'une puissance de x, quelque petit que soit son exposant (Théor. 8 et 10 du Mém. cit.). Donc en posant $t_1 f_1'(x) \sim f_1(x)$, on aura $t_1 > x$ (précisément parce qu'on ne peut avoir $t_1 \sim x$, et qu'on a $f_1(x) < f(x)$, Théor. 12 du Mém. cit.).

Nous supposerons d'abord que μ n'est pas un nombre entier. De $xf'(x) \sim x^\mu f_1(x)$ nous tirons:

$$f'(x) \sim x^{\mu-1}f_1(x)$$

et en différentiant:

$$f''(x) \sim (\mu-1)x^{\mu-2}f_1(x)+x^{\mu-1}f_1'(x).$$

En mettant $x^{\mu-1}t_1^{-1}f_1(x)$ au lieu du second terme du second membre, parce qu'à cause de $t_1 > x$, on a

$$x^{\mu-1}t_1^{-1}f_1(x) < x^{\mu-2}f_1(x),$$

nous trouvons $f''(x) \sim (\mu-1)x^{\mu-2}f_1(x)$, ou bien

$$x^2f''(x) \sim f(x).$$

Une seconde différentiation donnerait par le même raisonnement $x^3f'''(x) \sim f(x)$ et ainsi de suite.

Supposons maintenant μ entier. Alors après $\mu-2$ différentiations on obtient

$$x^{\mu-1}f^{(\mu-1)}(x) \sim f(x) \sim x^\mu f_1(x)$$

ou bien

$$f^{(\mu-1)}(x) \sim xf_1(x),$$

et en différentiant de nouveau:

$$f^{(\mu)}(x) \sim f_1(x)+xf_1'(x);$$

on pourra encore négliger $x f_1'(x) \backsim \frac{x}{t_1} f_1(x)$ relativement à $f_1(x)$, ce qui donnera:

$$x^{\mu} f^{(\mu)}(x) \backsim f(x).$$

Maintenant, de $f^{(\mu)}(x) \backsim f_1(x)$ on tire en différentiant $f^{(\mu+1)}(x) \backsim \frac{1}{t_1} f_1(x)$, ou bien

$$x^{\mu} t_1 f^{(\mu+1)}(x) \backsim f(x).$$

Nous avons exposé dans la première partie de cette démonstration que, à cause de $t_1 > x$, $\lim t_1' = \infty$, la différentiation de $f^{(\mu+1)}(x) \backsim \frac{1}{t_1} f_1(x)$ donne

$$x^{\mu} \frac{1}{\frac{dt_1^{-1}}{dx}} f^{(\mu+2)}(x) \backsim f(x),$$

puis il vient:

$$x^{\mu} \frac{1}{\frac{d^2 t_1^{-1}}{dx^2}} f^{(\mu+3)}(x) \backsim f(x),$$

etc. de sorte que le théorème est démontré dans toutes ses parties.

Exemple. Soit, pour donner un exemple,

$$f(x) = x lx l_2 x \dots l_n x.$$

On aura $t = x$, $t_1 = x lx$, on devra donc trouver:

$$f(x) \backsim x f'(x) \backsim x^2 \log x f''(x) \backsim x \cdot \frac{1}{\frac{d(x \log x)^{-1}}{dx}} f'''(x) \backsim \quad \text{etc.}$$

Maintenant de $f(x) = x lx l_2 x \dots l_n x$ on tire en différentiant:

$$f'(x) = lx l_2 x \dots l_n x + l_2 x l_3 x \dots l_n x + \dots + l_n x + 1$$

et par conséquent:

$$f'(x) \backsim lx l_2 x \dots l_n x.$$

En différentiant cette égalité on trouve:

$$f''(x) \backsim \frac{1}{x} l_2 x l_3 x \dots l_n x + \frac{1}{x} l_3 x \dots l_n x + \cdots$$

ou bien:

$$f''(x) \backsim \frac{1}{x} l_2 x l_3 x \dots l_n x.$$

En différentiant on trouve encore:

$$f'''(x) \sim -\frac{1}{x^2} l_2 x \dots l_n x + \frac{1}{x^2 lx} l_3 x \dots l_n x + \frac{1}{x^2 lx} l_4 x \dots l_n x + \cdots$$

ou bien:

$$f'''(x) \sim \frac{1}{x^2} l_2 x\, l_3 x \dots l_n x.$$

Nous avons donc:

$$f(x) \sim x f'(x) \sim x^2 \log x f''(x) \sim x^3 \log x f'''(x).$$

Le théorème exige que l'on ait: $x^3 \log x \sim x \cdot \frac{1}{\frac{d(x\log x)^{-1}}{dx}}$, ce qui s'accorde en effet très-bien, puisqu'on a:

$$x \cdot \frac{1}{\frac{d(x\log x)^{-1}}{dx}} = \frac{x^2 \log^2 x}{1+\log x},$$

et que dans l'égalité infinitaire le dénominateur du second membre se réduit à $\log x$.

Fribourg, octobre 1871.

Ueber eine geometrische Anwendung der complexen Multiplication der elliptischen Functionen.

(Von Herrn *L. Kiepert* in Freiburg i. Br.)

Wenn sich die Coordinaten einer Curve als elliptische Functionen darstellen lassen, deren Argument der Bogen dieser Curve ist, so hat sie mit dem Kreise die Eigenschaft gemein, dass sich die Theilung ihres Bogens in n gleiche Theile auf die Auflösung algebraischer Gleichungen zurückführen lässt. Der Grund davon liegt bekanntlich in dem Additions- und Multiplicationstheorem der elliptischen Functionen.

Im Allgemeinen wird der Grad der aufzulösenden Gleichungen sehr hoch, wenn man nur von der einfachen Multiplication Gebrauch macht. Wenn dagegen die complexe Multiplication der elliptischen Functionen anwendbar ist, so führen Gleichungen von weit niedrigerem Grade zum Ziele. So ist es bereits bekannt, dass die Theilung des Lemniscatenbogens in $4q+1$ gleiche Theile, — wenn $4q+1$ eine Primzahl ist, — zurückgeführt werden kann auf die Lösung einer Gleichung q^{ten} Grades, aus deren Wurzeln noch die Quadratwurzel zu ziehen ist.

Etwas ganz Aehnliches gilt für die Theilung einer Curve, die ich bereits in meiner Dissertation *) (Seite 22) als Beispiel angeführt habe. Hier lässt sich die Theilung in $6q+1$ gleiche Theile ausführen durch Auflösung einer Gleichung q^{ten} Grades, aus deren Wurzeln noch die Cubikwurzel zu ziehen ist. Dies soll in der folgenden Abhandlung gezeigt werden. Ich wende dabei eine Methode an, wie sie analog Herr *Weierstrass* bei der Fünf-Theilung des Lemniscatenbogens in seiner Vorlesung (Sommer 1869) gegeben hat.

Während die Gleichung der Lemniscate am einfachsten in der Form $r^2 = \cos 2\varphi$ geschrieben wird, hat die zu behandelnde Curve die Gleichung

$$r^3 = \cos 3\varphi,$$

wobei r der Radiusvector und φ der Winkel ist, den der Radiusvector mit der festen Anfangsaxe bildet. Bezeichnen wir mit u den Curvenbogen, so ist

---

*) De curvis quarum arcus integralibus ellipticis primi generis exprimuntur. Berolini, MDCCCLXX. Calvary.

$$du = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\varphi^2} = \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}},$$

oder wenn wir $r^2 = \frac{1}{\varrho}$ setzen, so wird

$$du = -\frac{d\varrho}{\sqrt{4\varrho^3-4}}; \quad u = -\int_\infty \frac{d\varrho}{\sqrt{4\varrho^3-4}}.$$

Der Bogen ist also ein elliptisches Integral erster Gattung, und ϱ ist eine elliptische Function des Argumentes u. Setzen wir daher $\varrho = \wp u$, so ist

$$\left(\frac{d\wp u}{du}\right)^2 = \wp'^2 u = 4\wp^3 u - 4,$$

und zwar ist ϱ genau eine $\wp$-Function, wie sie Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen eingeführt hat. Obgleich diese $\wp$-Function schon mehrfach in Dissertationen besprochen ist, will ich doch hier noch einmal ihre Eigenschaften, so weit ich sie in dem Folgenden benutze, kurz anführen.

Wird nämlich eine elliptische Function z des Argumentes u durch die Gleichung

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4B'z + A'$$

definirt, so lässt sich stets eine Function $\wp u$ finden, die definirt ist durch die Gleichung

$$\left(\frac{d\wp}{du}\right)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

wo g_2 und g_3 die Invarianten zweiten und dritten Grades der biquadratischen Form

$$Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4B'z + A'$$

sind. Diese Function $\wp u$ ist eine *gerade* Function von u, die nur für Werthe von u, welche der Null congruent sind, unendlich wird. Dabei lässt sich $\wp u$ rational ausdrücken durch z und $\frac{dz}{du}$, und umgekehrt lässt sich z rational ausdrücken durch $\wp u$ und $\frac{d\wp u}{du}$.

Die Fundamentalperioden der elliptischen Function mögen $2\omega_1$ und $2\omega_3$ heissen, und es möge gesetzt werden:

$$\wp\omega_1 = e_1, \quad \wp\omega_2 = e_2, \quad \wp\omega_3 = e_3,$$

wobei

$$\omega_2 = -\omega_1 - \omega_3$$

ist, dann wird

$$\left(\frac{d\wp u}{du}\right)^2 = \wp'^2 u = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)$$
$$= 4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3.$$

Die Function $\wp u$ ist abgeleitet aus einer anderen Function σu durch die Gleichung

$$\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} = -\wp u.$$

Umgekehrt können wir mit Hülfe dieser Gleichung die Function σu aus $\wp u$ ableiten, wenn wir zur Bestimmung der Integrationsconstanten die Gleichungen hinzufügen:

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma'(0) = 1, \quad \sigma''(0) = 0.$$

σu ist eine *ungerade* Function und verschwindet nur für Werthe von u, die der Null congruent sind, also für

$$u = 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_3,$$

wo μ und ν beliebige ganze Zahlen sind. Dagegen giebt es im Endlichen keinen Werth von u, für den σu unendlich wird.

Diese Function σu ist zwar selbst nicht periodisch, wenn man aber u um irgend eine Periode $2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_3$ vermehrt, so geht sie in sich selbst über, multiplicirt mit einem Exponentialfactor, dessen Exponent eine lineare Function des Argumentes u ist. Am deutlichsten ersieht man diese Eigenschaft aus der Gleichung

$$\sigma(u + 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_3) = (-1)^{\mu\nu+\mu+\nu} e^{(2\mu\eta_1 + 2\nu\eta_3)(u + \mu\omega_1 + \nu\omega_3)} \sigma u,$$

wo

$$\eta_1 = \frac{\sigma'\omega_1}{\sigma\omega_1}, \quad \eta_3 = \frac{\sigma'\omega_3}{\sigma\omega_3}.$$

Die Function σu ist nicht von u allein abhängig, sondern auch von den Grössen g_2 und g_3, die den Modul der elliptischen Function bestimmen. Wir werden daher für σu schreiben $\sigma(u, g_2, g_3)$, wenn es auf die Beschaffenheit der Grössen g_2 und g_3 ankommt.

In unserm Falle ist

$$g_2 = 0, \quad g_3 = 4;$$

$$e_1 = \wp\omega_1 = \varepsilon, \quad e_2 = \wp\omega_2 = 1, \quad e_3 = \wp\omega_3 = \varepsilon^2,$$

wobei ε und ε^2 dritte Wurzeln der Einheit sind. Die beiden Fundamentalperioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$ sind complex conjugirte Grössen und $2\omega_2 = -2\omega_1 - 2\omega_3$ ist die kleinste reelle Periode. Wir wollen zunächst diese Perioden bestimmen.

Aus den Eigenschaften der Function σu lässt sich folgende Relation herleiten

$$\sigma(mu, g_2, g_3) = m\sigma(u, m^4 g_2, m^6 g_3),$$

wo m eine ganz beliebige Grösse ist. Durch logarithmische Differentiation folgt hieraus

$$\frac{\sigma'(mu, g_2, g_3)}{\sigma(mu, g_2, g_3)} = \frac{1}{m}\frac{\sigma'(u, m^4 g_2, m^6 g_3)}{\sigma(u, m^4 g_2, m^6 g_3)},$$

$$\wp(mu, g_2, g_3) = \frac{1}{m^2}\wp(u, m^4 g_2, m^6 g_3).$$

Wenn wir für unsern Fall m gleich ε setzen, so wird

$$\sigma(\varepsilon u, 0, 4) = \varepsilon\sigma(u, 0, 4).$$

Da sich hier die Grössen g_2 und g_3 gar nicht ändern, so können wir kurz schreiben

$$(1.) \qquad \sigma\varepsilon u = \varepsilon\sigma u,$$

$$(2.) \qquad \frac{\sigma'\varepsilon u}{\sigma\varepsilon u} = \varepsilon^2\frac{\sigma' u}{\sigma u},$$

$$(3.) \qquad \wp\varepsilon u = \varepsilon\wp u.$$

Es war aber

$$u = -\int_\infty \frac{d\wp u}{\sqrt{4\wp^3 u - 4}},$$

daraus folgt, dass die kleinste reelle halbe Periode

$$(4.) \qquad \omega_2 = -\int_\infty^1 \frac{d\wp u}{\sqrt{4\wp^3 u - 4}} = \int_\varepsilon^{\varepsilon^2} \frac{d\wp u}{\sqrt{4\wp^3 u - 4}}.$$

Wenn wir jetzt εu statt u setzen, so wird $\varepsilon\wp u$ aus $\wp u$, wir haben also

$$(5.) \qquad \omega_2 = \varepsilon\int_{\varepsilon^2}^1 \frac{d\wp u}{\sqrt{4\wp^3 u - 4}} = \varepsilon\omega_3$$

und ebenso

$$(6.) \qquad \omega_2 = \varepsilon^2\omega_1;$$

oder

$$(7.) \qquad \omega_1 = \varepsilon\omega_2, \qquad \omega_3 = \varepsilon^2\omega_2, \qquad \omega_3 = \varepsilon\omega_1.$$

Daraus folgt:

$$(8.) \qquad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{\sigma'\omega_1}{\sigma\omega_1} = \dfrac{\sigma'\varepsilon\omega_2}{\sigma\varepsilon\omega_2} = \varepsilon^2\dfrac{\sigma'\omega_2}{\sigma\omega_2} = \varepsilon^2\eta_2, \\ \eta_3 = \dfrac{\sigma'\omega_3}{\sigma\omega_3} = \dfrac{\sigma'\varepsilon^2\omega_2}{\sigma\varepsilon^2\omega_2} = \varepsilon\dfrac{\sigma'\omega_2}{\sigma\omega_2} = \varepsilon\eta_2, \\ \eta_3 = \varepsilon^2\eta_1. \end{cases}$$

Jetzt sei

$$m = \alpha + \beta\varepsilon, \qquad m' = \alpha + \beta\varepsilon^2,$$
$$mm' = n = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$$

und

$$(9.)\qquad \varphi(u) = \frac{\sigma m u}{\sigma^n u},$$

dann hat diese Function $\varphi(u)$ die Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$, wie wir sogleich beweisen wollen. Es ist:

$$\begin{aligned}\sigma m(u+2\omega_1) &= \sigma(mu+2m\omega_1)\\ &= \sigma(mu+2\alpha\omega_1+2\beta\omega_3)\\ &= (-1)^{\alpha\beta+\alpha+\beta} e^{(2\alpha\eta_1+2\beta\eta_3)(mu+\alpha\omega_1+\beta\omega_3)}\sigma mu.\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$2\alpha\eta_1+2\beta\eta_3 = (\alpha+\beta\varepsilon^2)2\eta_1 = 2m'\eta_1$$

und

$$mu+\alpha\omega_1+\beta\omega_3 = mu+\omega_1(\alpha+\beta\varepsilon) = m(u+\omega_1),$$

folglich ist

$$(10.)\qquad \sigma m(u+2\omega_1) = (-1)^{\alpha\beta+\alpha+\beta} e^{2n\eta_1(u+\omega_1)}\sigma mu.$$

Vermehren wir im Nenner u um $2\omega_1$, so folgt aus

$$\sigma\,(u+2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma u$$

$$(11.)\qquad \sigma^n(u+2\omega_1) = (-1)^n e^{2n\eta_1(u+\omega_1)}\sigma^n u,$$

also

$$\varphi(u+2\omega_1) = (-1)^{\alpha\beta+\alpha+\beta+n}\varphi(u).$$

Da aber $n = \alpha^2+\beta^2-\alpha\beta$, so wird

$$\alpha\beta+\alpha+\beta+n = \alpha^2+\alpha+\beta^2+\beta,$$

und dies ist stets eine gerade Zahl, da $\alpha^2+\alpha$ und $\beta^2+\beta$ einzeln gerade Zahlen sein müssen. Wir haben also

$$(12.)\qquad \varphi(u+2\omega_1) = \varphi(u).$$

Eben so lässt sich zeigen, dass

$$(13.)\qquad \varphi(u+2\omega_3) = \varphi(u).$$

Wir wollen jetzt untersuchen, für welche Werthe von u diese elliptische Function unendlich und für welche Werthe sie gleich Null wird. Da σu mit u zugleich verschwindet, so wird der Zähler für $u=0$ unendlich klein von der ersten Ordnung, der Nenner aber unendlich klein von der n^{ten} Ordnung, es wird also für $u=0$ die Function $\varphi(u)$ unendlich gross von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, und ausserdem giebt es keine Werthe von u, welche $\varphi(u)$ unendlich gross machen und $u=0$ nicht congruent sind.

Daraus folgt, dass $\varphi(u)$ auch genau für $n-1$ nicht congruente Werthe

von u gleich Null wird; diese Werthe seien $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$. $\varphi(u)$ kann aber nur verschwinden, wenn der Zähler σmu verschwindet, wenn also $mu = 2k\omega_1 + 2l\omega_3$ wird. Wir haben daher

$$mu_\lambda = 2k\omega_1 + 2l\omega_3,$$

oder

$$\begin{aligned} mm'u_\lambda = nu_\lambda &= m'(2k\omega_1 + 2l\omega_3), \\ nu_\lambda &= (\alpha + \beta\varepsilon^2)(k\varepsilon + l\varepsilon^2)2\omega_2 \\ &= 2\omega_2\{\alpha(k\varepsilon + l\varepsilon^2) + \beta(k + l\varepsilon)\}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit u'_λ die zu u_λ conjugirt complexe Grösse, so ist

$$nu'_\lambda = 2\omega_2\{\alpha(k\varepsilon^2 + l\varepsilon) + \beta(k + l\varepsilon^2)\},$$

$$(14.) \qquad n(u_\lambda + u'_\lambda) = 2\omega_2\{\alpha(-k-l) + \beta(2k-l)\}.$$

Jetzt nehmen wir an, n sei eine Primzahl, dann müssen α und β relativ prim sein, denn jeder Factor, den sie gemeinsam haben, tritt in n als quadratischer Factor auf. Wir können deshalb 2 Zahlen γ und δ finden, so dass

$$\alpha\delta + \beta\gamma = 1.$$

k und l sind ganz beliebige Zahlen, deshalb können wir setzen

$$(15.) \qquad k = \lambda(\gamma - \delta), \qquad l = \lambda(-\gamma - 2\delta).$$

Tragen wir diese Werthe in Gleichung (14.) ein, so kommt

$$\begin{aligned} n(u_\lambda + u'_\lambda) &= 2\omega_2\{3\lambda\alpha\delta + 3\lambda\beta\gamma\} \\ &= 6\lambda\omega_2(\alpha\delta + \beta\gamma) = 6\lambda\omega_2. \end{aligned}$$

Wenn wir k und l diese Werthe geben und λ die Werthe von 1 bis $n-1$ durchlaufen lassen, so erhalten wir $n-1$ Werthe u_λ, für welche $\varphi(u_\lambda)$ verschwindet; es ist nur noch zu zeigen, dass sie ein vollständiges System incongruenter Werthe von u darstellen, für welche $\varphi(u)$ verschwindet. Es ist

$$u_1 + u'_1 = \frac{3}{n}2\omega_2, \qquad u_2 + u'_2 = \frac{6}{n}2\omega_2, \qquad \dots \qquad u_{n-1} + u'_{n-1} = \frac{3n-3}{n}2\omega_2.$$

Wenn aber n nicht durch 3 theilbar ist, — was stets der Fall ist, da n eine Primzahl sein soll, — so sind diese n Grössen in der That incongruent, folglich erst recht $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$. Da es aber überhaupt nur $n-1$ incongruente Werthe von u giebt, für welche $\varphi(u)$ verschwindet, so repräsentiren u_1, $u_2, \dots u_{n-1}$ ein vollständiges System incongruenter Werthe von u, für welche $\varphi(u) = 0$ wird.

Zugleich ergiebt sich folgendes: Wenn wir $\wp u_\lambda$ aufgefunden haben, so

haben wir auch sofort die conjugirte Grösse $\wp u'_\lambda$ und können daraus

$$\wp(u_\lambda + u'_\lambda) = \wp\frac{6\lambda\omega_2}{n}$$

ableiten, da ganz allgemein

$$\wp(v+w) = \frac{(\wp v + \wp w)(2\wp v\wp w - \frac{1}{2}g_2) - g_3 - \wp' v\wp' w}{2(\wp v - \wp w)^2}$$

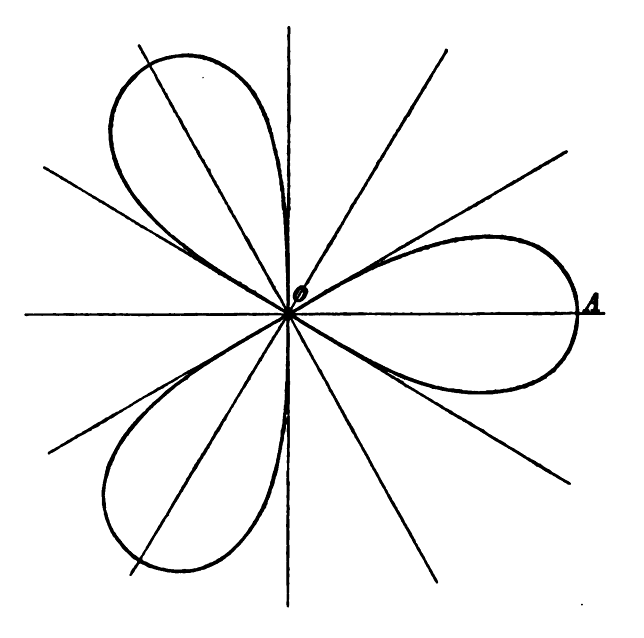
ist. Wir können dann also unmittelbar die Grössen

$$\wp\frac{6\omega_2}{n}, \quad \wp\frac{12\omega_2}{n}, \quad \ldots \quad \wp\frac{(6n-6)\omega_2}{n}$$

construiren, und da $\wp u = \frac{1}{r^2}$ ist, auch die zugehörigen Werthe von r. Nun war aber

$$\omega_2 = -\int_\infty^1 \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3-4}}$$
$$= \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^6}},$$

folglich ist ω_2 der Bogen OA und $6\omega_2$ der Bogen der ganzen Curve. Sind also die angeführten Werthe des Radiusvector r bekannt, so sind auch die gesuchten Theilpunkte auf der Curve gegeben.



Daher haben wir nur noch die Grössen $\wp u_\lambda$ zu bestimmen, und dies ist jetzt mit Hülfe eines Satzes, den Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen gegeben hat, sehr leicht ausführbar. Dieser Satz lautet: „Ist $\varphi(u)$ eine gerade Function, die nur für u gleich Null unendlich gross wird und zwar unendlich gross von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, so lässt sich $\varphi(u)$ als ganze rationale Function von $\wp u$ darstellen, deren Grad $\frac{n-1}{2}$ ist.“

Die Voraussetzungen dieses Satzes passen auf unsere Function $\varphi(u)$,

folglich können wir sie so darstellen. Setzen wir diese Function von $\wp u$ gleich Null, so erhalten wir eine Gleichung, deren Wurzeln die Grössen $\wp u_\lambda$ sind, weil die linke Seite $\varphi(u)$ für $u = u_\lambda$ verschwindet.

Da $\wp u$ eine gerade elliptische Function ist, so wird $\wp v = \wp w$ sein, wenn sich v von $-w$ nur um eine ganze Periode unterscheidet. Dies ist der Grund, weshalb von den Grössen

$$\wp u_1, \quad \wp u_2, \quad \dots \quad \wp u_{n-1}$$

je zwei einander gleich werden, und dass die Anzahl der Wurzeln jener Gleichung sich auf $\frac{n-1}{2}$ reducirt.

Aus der Entwickelung von $\varphi(u)$ folgt, dass der Coefficient von $(\wp u)^{\frac{n-1}{2}}$ gleich m wird. Die Bestimmung jener Gleichung von $\wp u$ wird noch wesentlich vereinfacht durch folgende Eigenschaft von $\varphi(u)$: Wenn $n = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ eine von 3 verschiedene Primzahl ist, so hat n stets die Form $6q+1$, und umgekehrt lässt sich jede Primzahl von der Form $6q+1$ auf die Form $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ bringen. Deshalb folgt aus der Gleichung $\sigma\varepsilon u = \varepsilon\sigma u$

$$\varphi(\varepsilon u) = \frac{\varepsilon\sigma m u}{\varepsilon^n \sigma^n u} = \frac{1}{\varepsilon^{6q}} \frac{\sigma m u}{\sigma^n u} = \varphi(u).$$

$\varphi(u)$ ändert sich also nicht, wenn wir εu statt u setzen, folglich darf sich dann auch jene Function von $\wp u$ nicht ändern. Nun ist aber $\wp\varepsilon u = \varepsilon\wp u$, folglich darf nur der Cubus von $\wp u$ vorkommen.

Somit ist bewiesen:

Wenn $n = 6q+1$ ist, so wird $\varphi(u)$ eine ganze rationale Function q^{ten} Grades von $\wp^3 u$, die wir leicht auffinden können, indem wir setzen

$$\varphi(u) = m\{\wp^{3q} u + A_1 \wp^{3q-3} u + A_2 \wp^{3q-6} u + \dots + A_q\}.$$

Entwickeln wir auf beiden Seiten nach Potenzen von u und setzen die Coefficienten gleicher Potenzen einander gleich, so bestimmen sich daraus die Grössen $A_1, A_2, \dots A_q$. Die Wurzeln der Gleichung

$$\wp^{3q} + A_1 \wp^{3q-3} + A_2 \wp^{3q-6} + \dots + A_q = 0$$

sind dann die gesuchten Grössen und geben die Lösung der allgemeinen Aufgabe.

Wir wollen zum Schluss noch die Grössen A_1, A_2 und A_3 wirklich berechnen. Dazu brauchen wir die Entwickelungen von σu und $\wp u$. Diese sind für $g_2 = 0$ und $g_3 = 4$

$$\sigma u = u + a_1 u^7 + a_2 u^{13} + a_3 u^{19} + \cdots,$$

wobei

$$a_1 = \frac{-1}{2.3.5.7}, \quad a_2 = \frac{-1}{2^3.3^2.5^2.7.11.13}, \quad a_3 = \frac{23}{2^4.3^4.5^3.7^2.11.13.17.19}, \quad \cdots;$$

ferner ist hier:

$$\wp u = u^{-2} + b_1 u^4 + b_2 u^{10} + b_3 u^{16} + \cdots,$$

wobei

$$b_1 = \frac{1}{7}, \quad b_2 = \frac{1}{7^2.13}, \quad b_3 = \frac{1}{7^3.13.19}, \quad \cdots.$$

Daraus folgt

$$\sigma m u = m\{u + a_1 m^6 u^7 + a_2 m^{12} u^{13} + a_3 m^{18} u^{19} + \cdots\},$$

$$\sigma^{6q+1} u = u^{6q+1} + (6q+1) a_1 u^{6q+7} + (6q+1)(a_2 + 3q a_1^2) u^{6q+13}$$
$$+ (6q+1)[a_3 + 6q a_1 a_2 + q(6q-1) a_1^3] u^{6q+19} + \cdots$$

und

$$\varphi(u) = \frac{\sigma m u}{\sigma^{6q+1} u}$$

$$= m\{u^{-6q} + (m^6 - 6q - 1) a_1 u^{-6q+6} + [(m^{12} - 6q - 1) a_2 - (6q+1)(m^6 - 3q - 1) a_1^2] u^{-6q+12}$$
$$+ [(m^{18} - 6q - 1) a_3 - (6q+1)(m^{12} + m^6 - 6q - 2) a_1 a_2 + (6q+1)\{m^6 - 1 + (3m^6 - 5)q - 6q^2\} a_1^3] u^{-6q+18} + \cdots$$

Ausserdem ist

$$\wp^{3q} u + A_1 \wp^{3q-3} u + A_2 \wp^{3q-6} u + \cdots + A_q$$

$$= u^{-6q} + (3q b_1 + A_1) u^{-6q+6} + \left[3q\left(b_2 + \frac{3q-1}{2} b_1^2\right) + A_1(3q-3) b_1 + A_2\right] u^{-6q+12}$$
$$+ \left[3q\left\{b_3 + (3q-1) b_1 b_2 + \frac{(3q-1)(3q-2)}{6} b_1^3\right\} + A_1(3q-3)\left(b_2 + \frac{3q-4}{2} b_1^2\right)\right.$$
$$\left. + A_2(3q-6) b_1 + A_3\right] u^{-6q+18} + \cdots.$$

Aus der Vergleichung dieser Entwickelung mit der von $\varphi(u)$ ergeben sich sofort die Grössen A_1, A_2, A_3, ...

Für $n = 7$ wird $m = 3 + \varepsilon$, $m' = 3 + \varepsilon^2$;

$$q = 1,$$

dann ist

$$m^6 = 37 + 360\varepsilon$$

und hieraus folgt

$$A_1 = (-7 + m^6) a_1 - 3 b_1 = -4 \frac{(1 + 3\varepsilon)}{7} = \frac{-4}{1 + 3\varepsilon^2};$$

also

$$\varphi(u) = m\left\{\wp^3 u - \frac{4}{1 + 3\varepsilon^2}\right\},$$

$$\wp u_\lambda = \sqrt[3]{\frac{4}{1 + 3\varepsilon^2}}.$$

Für $n=13$ setzen wir $m=4+\varepsilon,\ m'=4+\varepsilon^2$;

$$q = 2.$$

Hier wird

$$m^6 = 1513+2520\varepsilon,$$
$$m^{12} = -4061231+1275120\varepsilon,$$
$$A_1 = (m^6-13)\,a_1-6b_1 = -4\,(2+3\varepsilon)$$

und

$$A_2 = (m^{12}-13)\,a_2+13\,(7-m^6)\,a_1^2-6b_2-15b_1^2-3b_1A_1$$
$$= 16\cdot\frac{4+3\varepsilon}{13} = \frac{16}{4+3\varepsilon^2}.$$

Daher werden für $n=13$ die Grössen $\wp u_\lambda$ die Wurzeln der Gleichung

$$\wp^6 u-4\,(2+3\varepsilon)\,\wp^3 u+\frac{16}{4+3\varepsilon^2} = 0.$$

In ähnlicher Weise findet man für die Theilung in 19 gleiche Theile die Gleichung dritten Grades

$$\wp^9 u+12\,(3+2\varepsilon)\,\wp^6 u-48\,(1+\varepsilon)\,\wp^3 u+\frac{64}{5+3\varepsilon} = 0$$

und für die Theilung in 31 gleiche Theile die Gleichung fünften Grades

$$\wp^{15}u-4(5-33\varepsilon)\wp^{12}u+112(4+3\varepsilon)\wp^9u-64(37+18\varepsilon)\wp^6u+256(5+3\varepsilon)\wp^3u-\frac{1024}{1+6\varepsilon} = 0.$$

Berlin, 23. März 1871.

Ueber die Entwicklung von Functionen nach den Integralen einer Klasse von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

(Von Herrn *L. Pochhammer.*)

Als Reihenentwicklungen, durch die eine beliebige, innerhalb eines gewissen Werthgebietes eindeutige und stetige Function dargestellt werden kann, sind, ausser den Potenz- und trigonometrischen Reihen, namentlich die nach Kugelfunctionen und die nach *Fourier-Bessel*schen Integralen fortschreitenden Reihen von Wichtigkeit geworden, welche von *Laplace, Fourier, Poisson* bei der Auflösung partieller Differentialgleichungen zur Bestimmung der willkürlichen Functionen angewendet worden sind. In den beiden letzterwähnten Reihen bestehen die einzelnen Summanden aus Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, in welcher ein Parameter successiv verschiedene Werthe annimmt. Die Zulässigkeit dieser zuerst ohne strengen Beweis eingeführten Darstellungen einer beliebigen Function, respective die Feststellung des Convergenzgebietes, bildet den Gegenstand der bekannten Abhandlungen von *Lejeune-Dirichlet,* sowie späterer Arbeiten der Herren *Heine, C. Neumann, Thomé* u. A.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass eine grosse Klasse von linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit *einer* unabhängigen Variablen analoge Eigenschaften wie die Differentialgleichung der Kugelfunctionen und die der *Bessel*schen Functionen aufweist. Indem man in irgend einer derselben einem Parameter successiv die Werthe 0, 1, 2, 3, ... giebt, kann man durch die zugehörigen Integrale innerhalb eines gewissen Flächengebietes eine beliebige eindeutige und stetige Function einer complexen Variablen darstellen. Der in den nachstehenden Rechnungen bewiesene Satz lässt sich kurz dahin aussprechen, dass jede Function, die nach positiven ganzen Potenzen ihrer Variablen entwickelbar ist, auch in eine convergente, nach den erwähnten Integralen fortschreitende Reihe entwickelt werden kann.

Den Nullpunkt der unabhängigen Variablen x verlegt man, der Einfachheit halber, in denjenigen Theil der x-Ebene, wo die zu entwickelnde Function

als eindeutig und stetig vorausgesetzt wird, und beschränkt sodann die ganze Betrachtung auf die Umgebung des Punktes $x = 0$. Die Entwicklung der Function nach den genannten Integralen wird allein für dieses Gebiet gegeben; dem entsprechend werden aber auch die Coefficienten der Differentialgleichung nur in Bezug auf die Umgebung des Punktes $x = 0$ Bedingungen unterworfen.

Das gemeinsame Merkmal der Differentialgleichungen, deren Integrale hier angewendet werden, besteht darin, dass sie in der Umgebung des Punktes $x = 0$ zwei convergente, nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihen zu Integralen haben, deren eine nur ganze positive Potenzen von x enthält. Man betrachtet zunächst die Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 P_m}{dx^2} + g(x) \frac{dP_m}{dx} + h(x) P_m = m(m+b-1) P_m,$$

in welcher m eine positive ganze Zahl ist, die der Reihe nach gleich 0, 1, 2, ... gesetzt wird, und $g(x)$, $h(x)$ zwei convergente Reihen von der Form

$$g(x) = b\,x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \cdots,$$
$$h(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

bedeuten. Die Constanten b, b_1, b_2, ... c_1, c_2, ... bleiben völlig beliebig bis auf die Bedingung, dass dieselben von m unabhängig sein müssen. Nur die Constante b, welche den Coefficienten der Anfangspotenz von $g(x)$ bildet, unterliegt ausserdem der Einschränkung, dass sie nicht gleich einer negativen ganzen Zahl oder gleich Null sein darf. Die Differentialgleichung hat im Allgemeinen zwei nach steigenden Potenzen von x entwickelbare particuläre Integrale. Zur Entwicklung der beliebigen Function wendet man indessen nur eins derselben an, nämlich dasjenige, welches ausschliesslich positive ganze Potenzen von x enthält. Man definirt die Function $P_m(x)$ als die der obigen Differentialgleichung genügende Reihe von der Form:

$$x^m \{1 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots\}.$$

Dann besteht, *wie man auch die in* $g(x)$ *und* $h(x)$ *vorkommenden Constanten gewählt haben möge,* der Satz: *dass eine beliebige Function* $\varphi(x)$, *welche in der Umgebung des Punktes* $x = 0$ *eindeutig und stetig ist, in eine convergente Reihe*

$$\varphi(x) = \beta_0 P_0(x) + \beta_1 P_1(x) + \beta_2 P_2(x) + \cdots \text{ in inf.}$$

entwickelt werden kann. Die *Begrenzung* des Convergenzgebietes dieser Reihe ist, wie bei den Potenzreihen, stets ein *Kreis.*

Zur Bestimmung der constanten Coefficienten β wird eine zweite

Function, welche *Ergänzungsfunction von* $P_m(x)$ heissen möge, zu Hülfe genommen. Die Differentialgleichung derselben stimmt mit der des integrirenden Factors der für P_m gegebenen Gleichung überein; ausgenommen ist jedoch der Fall, wo die Constante b eine positive ganze Zahl ist, da alsdann für die Ergänzungsfunction eine nicht homogene Differentialgleichung gewählt werden muss. Die Ergänzungsfunction $Q_n(x)$ wird, wenn b nicht ganzzahlig ist, für ein beliebiges n durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^2 Q_n) - \frac{d}{dx}(g(x)\,Q_n) + h(x)\,Q_n = n(n+b-1)\,Q_n,$$

und wenn b eine positive ganze Zahl ist, durch

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^2 Q_n) - \frac{d}{dx}(g(x)Q_n) + h(x)Q_n = n(n+b-1)\,Q_n + A x^\gamma$$

definirt, wo A und γ passend zu bestimmende Constanten sind. In beiden Fällen soll Q_n dasjenige particuläre Integral sein, welches durch eine Reihe von der Form

$$x^{-n-1}\{1+K_1 x + K_2 x^2 + \cdots\}$$

dargestellt werden kann. Die gesonderte Behandlung des Falles, wo b eine positive ganze Zahl ist, wird nothwendig, weil die Differentialgleichung des integrirenden Factors für diese Werthe von b ein logarithmisches Integral hat; die Constanten A und γ werden so gewählt, dass die logarithmischen Glieder verschwinden.

Zwischen den Functionen P und Q bestehen Beziehungen, welche bekannten Gleichungen aus der Theorie der *Kugelfunctionen* und *Bessel*schen Functionen analog sind. Es zeigt sich, dass das Product $P_m(x)\,Q_n(x)$ die Potenz x^{-1} nicht enthält, sobald m und n von einander verschieden sind, während in $P_m(x)\,Q_m(x)$ diese Potenz x^{-1} den Coefficienten 1 hat. Im Folgenden ist der Coefficient der Potenz x^{-1} in der Entwicklung irgend einer Function $F(x)$ nach steigenden oder nach steigenden und fallenden Potenzen von x kurz durch

$$[F(x)]_{-1}$$

bezeichnet worden. Dann wird der erwähnte Satz durch die Gleichungen

$$[P_m(x)\,Q_n(x)]_{-1} = 0, \qquad m \gtrless n, \qquad \text{und} \qquad [P_m(x)\,Q_m(x)]_{-1} = 1$$

ausgedrückt. Die Aufsuchung des Coefficienten der Potenz x^{-1} ist gleichbedeutend mit der Ausführung einer geschlossenen Integration um den Punkt $x=0$; der Satz ist dem von *Laplace* über die zwischen -1 und $+1$ genommenen Integrale von Producten zweier Kugelfunctionen ganz analog.

Aus den obigen Gleichungen ergiebt sich für die Constante β_ν der Werth $[\varphi(x)Q_\nu(x)]_{-1}$. Man hat also, um die Coefficienten $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ zu berechnen, die als gegeben vorausgesetzte Potenzentwicklung von $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots$$

der Reihe nach mit $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, ... zu multipliciren und den jedesmaligen Coefficienten der Potenz x^{-1} in dem Producte zu bestimmen. Somit gewinnt man, indem man bei der Bezeichnung der Coefficienten lieber den Buchstaben u statt x anwendet, für die beliebige, in der Umgebung von $x=0$ eindeutige und stetige Function $\varphi(x)$ die Reihenentwicklung:

$$\varphi(x) = [\varphi(u)Q_0(u)]_{-1}P_0(x)+[\varphi(u)Q_1(u)]_{-1}P_1(x)+[\varphi(u)Q_2(u)]_{-1}P_2(x)+\cdots \text{ in inf.}$$

Zum Beweise der Convergenz dieser Reihe ist die Ableitung mehrerer Hülfssätze erforderlich, welche sich auf die Werthe von $P_m(x)$, $Q_m(x)$ für ein unbegrenzt grosses m beziehen.

Die letzterhaltene Formel bleibt in Kraft, wenn die Functionen P und Q nicht durch die oben angeführten Differentialgleichungen, sondern durch die *allgemeineren*

$$f(x)\frac{d^2P_m}{dx^2}+g(x)\frac{dP_m}{dx}+h(x)P_m = m(m+b-1)P_m,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x)Q_n)-\frac{d}{dx}(g(x)Q_n)+(h(x)-n(n+b-1))Q_n = \begin{cases}0\\ Ax^\gamma\end{cases}$$

definirt werden, wo $g(x)$ und $h(x)$ die frühere Bedeutung haben, und $f(x)$ eine beliebige convergente Reihe von der Form:

$$f(x) = x^2(1+a_1x+a_2x^2+\cdots)$$

bezeichnet. Diese Functionen P, welche auf die früheren Functionen durch die Substitution $\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{d\xi}{\xi}$ zurückgeführt werden, unterscheiden sich von letzteren dadurch, dass das Convergenzgebiet der Reihe

$$\varphi(x) = [\varphi(u)Q_0(u)]_{-1}P_0(x)+[\varphi(u)Q_1(u)]_{-1}P_1(x)+[\varphi(u)Q_2(u)]_{-1}P_2(x)+\cdots$$

nicht kreisförmig begrenzt ist. Die Begrenzungscurve ist vielmehr diejenige Curve, welche in der x-Ebene einem Kreise in der ξ-Ebene bei der angewendeten Substitution $\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{d\xi}{\xi}$ entspricht.

In dem letzten Abschnitt (§§. 15—17) sind als Beispiel zwei specielle Differentialgleichungen behandelt worden, bei denen die Functionen Q ganze

rationale Functionen von $\frac{1}{x}$ werden; für dieselben besteht die Gleichung

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} P_\mu(x)\, Q_\mu(t) = \frac{1}{t-x}.$$

Die Identität der letzterwähnten Summe mit der Potenzentwicklung von $\frac{1}{t-x}$ wird durch directe Summation, unter Anwendung eines Satzes über die Binomialcoefficienten, bewiesen.

Abschnitt I.

Definition und asymptotischer Werth der Function $P_m(x)$.

§. 1. Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mathfrak{X}_1 \frac{dy}{dx} + \mathfrak{X}_2 y = 0$$

der Bedingung genügen soll, zwei particuläre Integrale von der Form

$$x^m \{1 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots\}, \qquad x^{m'} \{1 + k'_1 x + k'_2 x^2 + \cdots\}$$

zu haben, so werden dadurch die Anfangsglieder der nach Potenzen von x aufsteigenden Entwicklungen von $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ bestimmt. Denn wenn man in die Differentialgleichung die Reihen

$$y = x^\mu + k_1 x^{\mu+1} + \cdots, \qquad \mathfrak{X}_1 = b_0 x^{\mu'} + \cdots, \qquad \mathfrak{X}_2 = c_0 x^{\mu''} + \cdots$$

einsetzt, und für μ eine quadratische Gleichung mit den Wurzeln m und m' verlangt, so ergiebt sich unmittelbar

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{1-m-m'}{x} + b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots,$$

$$\mathfrak{X}_2 = \frac{mm'}{x^2} + \frac{c_1}{x} + c_2 + c_3 x + \cdots.$$

Man setzt nun fest, dass der eine Exponent, m, eine positive ganze Zahl oder Null sein soll. Der andere Exponent, m', bleibt beliebig; wird der Coefficient des Anfangsgliedes von $\mathfrak{X}_1$ durch b bezeichnet, so folgt aus $1-m-m' = b$, dass das Anfangsglied von $\mathfrak{X}_2$ den Coefficienten $mm' = -m(m+b-1)$ hat. Man multiplicire die Differentialgleichung mit x^2 und setze $x^2\mathfrak{X}_1 = g(x)$, $x^2\mathfrak{X}_2 = -m(m+b-1) + h(x)$. Dann hat man die Gleichung

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + g(x) \frac{dy}{dx} + h(x)y = m(m+b-1)y,$$

in welcher $g(x)$ und $h(x)$ zwei Reihen von der Form

$$(1.)\quad \begin{cases} g(x) = b\,x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \cdots, \\ h(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \end{cases}$$

bedeuten. Diese Differentialgleichung bildet den Ausgangspunkt für die nachstehenden Untersuchungen. Das particuläre Integral derselben, welches die Anfangspotenz x^m hat, werde durch $P_m(x)$ bezeichnet. Für die Constante m denke man sich nach einander die Werthe 0, 1, 2, ... eingesetzt.

Die Function $P_m(x)$ wird somit als dasjenige particuläre Integral der Differentialgleichung

$$(2.)\quad x^2 \frac{d^2 P_m}{dx^2} + g(x) \frac{dP_m}{dx} + h(x) P_m = m(m+b-1) P_m$$

definirt, welches durch eine Reihe von der Form

$$(3.)\quad P_m(x) = x^m \{1 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots\}$$

darstellbar ist.

In Bezug auf die Functionen $g(x)$ und $h(x)$ setzt man erstens voraus, dass sie in der Umgebung des Punktes $x=0$ eindeutig und stetig sind, oder also dass die Reihen (1.) convergent sind. Zweitens sollen die in $g(x)$ und $h(x)$ vorkommenden Constanten $b,\ b_1,\ b_2,\ \dots\ c_1,\ c_2,\ \dots$ von m unabhängig sein, so dass sie unverändert bleiben, wenn m successiv gleich $0, 1, 2, \dots$ gesetzt wird. Drittens setzt man voraus, dass die Constante b, welche den Werth von $\frac{1}{x} g(x)$ für $x=0$ darstellt, nicht gleich einer negativen ganzen Zahl oder gleich Null ist. Im Uebrigen bleiben die Constanten $b,\ b_1,\ b_2,\ \dots\ c_1,\ c_2,\ \dots$ beliebig.

Unter den angeführten Voraussetzungen hat die Differentialgleichung (2.) stets ein Integral $P_m(x)$ von der Form der Reihe (3.), wie in §. 3 näher erörtert wird. Die Coefficienten k bestimmen sich in eindeutiger Weise, und die Reihe ist convergent.

§. 2. Es bezeichne $\varphi(x)$ eine in der Umgebung des Punktes $x=0$ eindeutige und stetige Function. Die Potenzreihe, in welche dieselbe nach dem Satze von *Cauchy* entwickelt werden kann, sei

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \cdots.$$

Es soll die Aufgabe behandelt werden, die Function $\varphi(x)$ in eine nach den Integralen P fortschreitende Reihe

$$\varphi(x) = \beta_0 P_0(x) + \beta_1 P_1(x) + \beta_2 P_2(x) + \cdots \quad \text{in inf.}$$

zu entwickeln und die Convergenz der Entwicklung zu beweisen.

Aus dem Umstande, dass der Index der Functionen P mit dem Exponenten ihrer Anfangspotenz übereinstimmt, und also jedes folgende P mit einer höheren Potenz von x beginnt, ergiebt sich unmittelbar, dass die Coefficienten β eindeutig bestimmt sind, vorbehaltlich der Convergenz der Reihe. Man bilde zunächst, indem man durch τ eine beliebige endliche ganze Zahl bezeichnet, eine aus τ Functionen P bestehende Summe

$$\beta_0 P_0(x)+\beta_1 P_1(x)+\cdots+\beta_{\tau-1} P_{\tau-1}(x),$$

und stelle die Forderung, dass dieselbe mit der Potenzreihe von $\varphi(x)$ in dem constanten Gliede und in den Coefficienten der $\tau-1$ ersten Potenzen von x übereinstimme. Dies entspricht der Gleichung:

$$\beta_0 P_0(x)+\beta_1 P_1(x)+\cdots+\beta_{\tau-1} P_{\tau-1}(x) = \alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_{\tau-1} x^{\tau-1}+S,$$

wenn S einen Ausdruck bezeichnet, der nur höhere Potenzen von x als $x^{\tau-1}$ enthält.

Die Forderung der Uebereinstimmung des constanten Gliedes auf der linken und rechten Seite der Gleichung ergiebt $\beta_0 = \alpha_0$, da ein von x unabhängiges Glied nur in $P_0(x)$ vorkommt. Der Coefficient von x enthält nur β_0 und β_1, und zwar die Unbekannte β_1 mit dem Factor 1; der Coefficient von x^2 enthält nur β_0, β_1 und β_2, u. s. w. Es entsteht für die Grössen β_0, β_1, ... $\beta_{\tau-1}$ ein System von τ linearen Gleichungen, bei dem der Fall, dass eine dieser Grössen unbestimmbar wäre, ausgeschlossen bleibt, weil jede derselben in derjenigen Gleichung, in der sie zuerst vorkommt, und durch die sie bestimmt wird, den Factor 1 hat. Hieraus folgt *die Eindeutigkeit der Coefficienten* β.

Die allgemeine Bestimmung der Constanten β wird im Folgenden durch die Betrachtung einer der Gleichung (2.) verwandten Differentialgleichung bewerkstelligt werden. Zum Beweise der Convergenz der Reihe hat man zu zeigen, dass das Restglied $\sum_{\nu=\tau}^{\nu=\infty} \beta_\nu P_\nu(x)$ mit wachsendem τ einer beliebig kleinen Grösse gleich wird. Es sind jedoch hierzu eine Reihe von Hülfssätzen erforderlich, durch welche das Verhalten sowohl der Function $P_m(x)$ als des Coefficienten β_m für ein unbegrenzt wachsendes m festgestellt wird.

§. 3. Aus der Differentialgleichung (3.) lässt sich der asymptotische Werth der Function $P_m(x)$ für $m = \infty$ herstellen. Indem *der Quotient* $\frac{P_m(x)}{x^m}$ für ein über alle Grenzen wachsendes m gleich einem *von Null und Unendlich*

verschiedenen Werthe gefunden wird, gelangt man zu der Folgerung: dass innerhalb des Flächenstücks, wo die Functionen P überhaupt definirt worden sind, *die Grenze des Convergenzgebietes der Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\beta_\nu P_\nu(x)$ *ein Kreis ist,* wenn vorläufig vorausgesetzt wird, dass die Reihe für irgend einen Werth von x convergirt.

Um letzteren Satz zu beweisen, hat man den Werth von $P_m(x)$ zwischen zwei Grenzen einzuschliessen. Es sollen zu diesem Behuf zwei auf $\operatorname{mod.} P_m(x)$ bezügliche Ungleichheiten abgeleitet werden, die sich aus der Differentialgleichung (2.) durch Untersuchung der Coefficienten k ergeben.

Substituirt man $P_m(x) = x^m\eta$, so genügt die Function η der Differentialgleichung

$$x\frac{d^2\eta}{dx^2}+\left[2m+\frac{1}{x}g(x)\right]\frac{d\eta}{dx}$$
$$+\left[\frac{m(m-1)+h(x)-m(m+b-1)}{x}+\frac{mg(x)}{x^2}\right]\eta = 0$$

oder

$$x\frac{d^2\eta}{dx^2}+[2m+b+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots]\frac{d\eta}{dx}$$
$$+[m(b_1+b_2x+b_3x^2+\cdots)+c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots]\eta = 0,$$

und zwar ist sie dasjenige particuläre Integral, welches durch die Reihe

$$\eta = 1+k_1x+k_2x^2+\cdots$$

dargestellt wird. Man führe die Bezeichnungen

$$b_1+b_2x+b_3x^2+\cdots = -E_1(x),$$
$$b_1+b_2x+b_3x^2+\cdots+\frac{1}{m}(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots) = -E_2(x)$$

ein, dann lautet die Differentialgleichung für η:

$$(4.)\qquad x\frac{d^2\eta}{dx^2} = [-2m-b+xE_1(x)]\frac{d\eta}{dx}+mE_2(x)\eta.$$

Die Functionen $E_1(x)$ und $E_2(x)$ sind, wie $g(x)$ und $h(x)$, in der Umgebung des Punktes $x=0$ eindeutig und stetig. Der nächstgelegene singuläre Punkt für die Differentialgleichung (2.), d. h. der in der complexen Ebene vom Punkt $x=0$ am wenigsten entfernte Punkt, für welchen eine der Functionen $g(x)$, $h(x)$ unstetig oder unbestimmt wird, habe vom Punkte $x=0$ den Abstand ϱ. Durch r bezeichne man eine reelle positive Zahl, die um eine beliebig kleine, jedoch endliche Grösse kleiner als ϱ ist. Ferner seien

l_1, l_2 zwei reelle positive Constanten, welche den Modul von $E_1(x)$, respective $E_2(x)$ in jedem Punkte der den Nullpunkt umgebenden Kreisfläche mit dem Radius r übertreffen. Diese Zahlen l_1 und l_2 sollen unabhängig von m gewählt werden, was möglich ist, da $E_2(x)$ für $m = \infty$ endlich bleibt, während $E_1(x)$ die Grösse m nicht enthält. Entwickelt man $E_1(x)$ und $E_2(x)$ nach der *Maclaurin*schen Formel, so gelten bekanntlich für die daselbst auftretenden Constanten $E_1^{(\nu)}(0)$, $E_2^{(\nu)}(0)$ die Ungleichheiten

$$\text{mod.}\,E_1^{(\nu)}(0) < \nu!\,\frac{l_1}{r^\nu}, \qquad \text{mod.}\,E_2^{(\nu)}(0) < \nu!\,\frac{l_2}{r^\nu}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\text{mod.}\,E_1^{(\nu)}(0) < \left[\frac{d^\nu}{dx^\nu}\,\frac{l_1}{1-\frac{x}{r}}\right]_{x=0}, \qquad \text{mod.}\,E_2^{(\nu)}(0) < \left[\frac{d^\nu}{dx^\nu}\,\frac{l_2}{1-\frac{x}{r}}\right]_{x=0}.$$

Nach *Cauchys* Methode sollen aus dem letzteren Satze Schlüsse in Betreff der Coefficienten k abgeleitet werden. Die zu diesem Zweck anzustellenden Rechnungen sind denen ganz analog, die ich in meinem früheren Aufsatze *„über die einfachen singulären Punkte linearer Differentialgleichungen"* (dieses Journ. Bd. 73) für die n^{te} Ordnung durchgeführt habe; nur hat man hier darauf Rücksicht zu nehmen, dass die betreffenden Eigenschaften der Coefficienten k auch für ein über alle Grenzen wachsendes m bewiesen werden müssen. — Als bekannt wird der Satz, welcher sowohl in dem oben citirten Aufsatz als in der Abhandlung des Herrn *Fuchs* über lineare Differentialgleichungen im 66ten Bande d. J. als Specialfall enthalten ist, vorausgesetzt: dass eine Differentialgleichung von der Form

$$(5.)\qquad x\frac{d^2y}{dx^2} = (\delta_0+\delta_1x+\delta_2x^2+\cdots)\frac{dy}{dx}+(\delta'_0+\delta'_1x+\delta'_2x^2+\cdots)y$$

eine convergente Reihe $y = 1+\gamma_1x+\gamma_2x^2+\cdots$ zum Integral hat, sobald δ_0 weder eine positive ganze Zahl noch Null ist, und dass das Convergenzgebiet der Reihe sich bis zum nächstgelegenen singulären Punkt der Differentialgleichung erstreckt. Aus dem Satze folgt hier zunächst, dass alle Functionen $P_m(x)$ in der Umgebung des Punktes $x = 0$ eindeutig und stetig sind. Denn da der Fall, dass b eine negative ganze Zahl oder Null ist, ausgeschlossen wurde, so ist die Grösse $-2m-b$, welche in der Gleichung (4.) der Constanten δ_0 in (5.) entspricht, für keinen Werth von m eine positive ganze Zahl oder Null. *Die Reihe* $P_m(x) = x^m(1+k_1x+\cdots)$ *ist also für ein beliebiges* m *convergent.* — Im Folgenden handelt es sich ausschliesslich um die Er-

mittelung des Werthes von $P_m(x)$ für ein sehr grosses m; man nimmt an, dass m grösser als mod. b, und folglich mod. $(2m+b)$ grösser als m ist.

In die Differentialgleichung (4.) führe man die Reihe $1+k_1x+k_2x^2+\cdots$ für η, sowie die *Maclaurin*schen Entwicklungen für $E_1(x)$ und $E_2(x)$ ein, und setze die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x gleich Null. Dann ergiebt sich für die Grössen k das Gleichungssystem:

$$(2m+b)k_1 = mE_2(0),$$
$$2(2m+b+1)k_2 = (E_1(0)+mE_2(0))k_1+mE_2'(0),$$
$$3(2m+b+2)k_3 = (2E_1(0)+mE_2(0))k_2+(E_1'(0)+mE_2'(0))k_1+\tfrac{1}{2}mE_2''(0), \text{ etc.}$$

Die Constanten $E_1(0)$, $E_2(0)$, $E_1'(0)$, $E_2'(0)$, ... kommen nur im Zähler der für k_1, k_2, ... sich ergebenden Ausdrücke vor, während die Nenner durch $2m+b$, $2m+b+1$, ... gebildet werden. Ersetzt man $2m+b$, $2m+b+1$, ... durch m, $m+1$, ..., so werden die Nenner dem absoluten Werthe nach verkleinert, da $m <$ mod. $(2m+b)$ vorausgesetzt ist. Führt man ferner statt der auf $E_1(x)$ und $E_2(x)$ bezüglichen Ausdrücke $E_1(0)$, $E_2(0)$, $E_1'(0)$, $E_2'(0)$, ... die analogen von $\frac{l_1}{1-\frac{x}{r}}$ und $\frac{l_2}{1-\frac{x}{r}}$ ein, so werden, den angeführten Ungleichheiten gemäss, die Zähler der k vergrössert, während gleichzeitig alle Ausdrücke reell und positiv werden. Wenn man in der Differentialgleichung (4.) also $2m+b$, $E_1(x)$, $E_2(x)$, η durch m, $\frac{l_1}{1-\frac{x}{r}}$, $\frac{l_2}{1-\frac{x}{r}}$, v ersetzt, und die Reihe $\eta = 1+k_1x+k_2x^2+\cdots$ mit der durch die Gleichung

$$(6.)\qquad x\frac{d^2v}{dx^2} = \left(-m+\frac{xl_1}{1-\frac{x}{r}}\right)\frac{dv}{dx}+\frac{ml_2}{1-\frac{x}{r}}v$$

definirten Reihe

$$v = 1+A_1x+A_2x^2+\cdots$$

vergleicht: so sind die Coefficienten A_1, A_2, ... sämmtlich reell und positiv, und es besteht für ein beliebiges ν die Ungleichheit: mod. $k_\nu < A_\nu$.

Man multiplicire die Gleichung (6.) mit $r\left(1-\frac{x}{r}\right)$ und setze $A_\nu = \frac{1}{r^\nu}B_\nu$, wodurch die Reihe v die Form

$$v = 1+B_1\frac{x}{r}+B_2\frac{x^2}{r^2}+\cdots$$

annimmt. Durch Einsetzen dieser Reihe in die Differentialgleichung von v

ergiebt sich für die Coefficienten B die recurrirende Gleichung

$$\frac{B_{\nu+1}}{B_\nu} = \frac{\nu(\nu-1)+\nu(m+rl_1)+mrl_2}{(\nu+1)(\nu+m)}$$

oder

$$\frac{B_{\nu+1}}{B_\nu} = 1+\frac{(rl_1-2)\nu+(rl_2-1)m}{(\nu+1)(\nu+m)}.$$

Durch l bezeichne man eine reelle positive Zahl, welche grösser als rl_1-2 und als rl_2-1 ist; dieselbe soll, ebenso wie l_1 und l_2, unabhängig von m gewählt werden. Dann folgt:

$$\frac{B_{\nu+1}}{B_\nu} < 1+\frac{l(\nu+m)}{(\nu+1)(\nu+m)}, \quad B_{\nu+1} < \left(1+\frac{l}{\nu+1}\right)B_\nu.$$

Da B_0 gleich Eins ist, so hat man

$$B_1 < 1+\frac{l}{1}, \quad B_2 < \left(1+\frac{l}{1}\right)\left(1+\frac{l}{2}\right), \quad \ldots$$

$$B_\nu < \left(1+\frac{l}{1}\right)\left(1+\frac{l}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{l}{\nu}\right),$$

oder:

$$B_\nu < \frac{(l+1)(l+2)\ldots(l+\nu)}{1.2\ldots\nu}.$$

Da $A_\nu = \frac{1}{r^\nu}B_\nu$ ist, und $\text{mod.}\,k_\nu < A_\nu$ bewiesen wurde, so ist um so mehr:

$$\text{mod.}\,k_\nu < \frac{(l+1)(l+2)\ldots(l+\nu)}{1.2\ldots\nu}\,\frac{1}{r^\nu}.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar eine Ungleichheit für den Modul der Reihe η. Nennt man ω den Modul von x, so wird der absolute Werth von η vergrössert, wenn man ω für x und überall $\frac{(l+1)\ldots(l+\nu)}{\nu!\,r^\nu}$ für k_ν einsetzt. Es ist also:

$$\text{mod.}\,\eta < 1+\frac{l+1}{1}\,\frac{\omega}{r}+\frac{(l+1)(l+2)}{1.2}\,\frac{\omega^2}{r^2}+\cdots+\frac{(l+1)\ldots(l+\nu)}{1.2\ldots\nu}\,\frac{\omega^\nu}{r^\nu}+\cdots.$$

Der rechts stehende Ausdruck ist nach dem binomischen Satze gleich $\left(1-\frac{\omega}{r}\right)^{-l-1}$, so dass die Ungleichheit

$$\text{mod.}\,\eta < \left(1-\frac{\omega}{r}\right)^{-l-1}$$

entsteht. Die letztere Potenz stellt aber für $\omega < r$ eine endliche positive Zahl dar, die von m unabhängig ist. Man kann daher eine reelle positive, von m unabhängige Constante L angeben, welche für $\omega < r$ stets grösser

als $\left(1-\frac{\omega}{r}\right)^{-l-1}$ ist. Die zwei Forderungen, dass ω um eine endliche Zahl kleiner als r, und r um eine endliche Zahl kleiner als ϱ sei, geben für ω hier nur die eine Bedingung $\omega < \varrho$, da die Differenzen $\varrho - r$ und $r-\omega$ beliebig klein gewählt werden können, wenn sie nur endlich sind.

Aus $\text{mod.}\,\eta < L$ folgt für die Function $P_m(x)$, unter der Voraussetzung dass ω, der Modul von x, kleiner als ϱ ist, die Ungleichheit

$$(7.)\qquad \text{mod.}\,P_m(x) < L\omega^m,$$

in welcher m eine beliebige ganze Zahl, die grösser als $\text{mod.}\,b$ ist, bedeutet.

§. 4. Die Ungleichheit (7.) dient im Folgenden zu dem Beweis der Convergenz der nach den Integralen P fortschreitenden Reihen. Um jedoch auch in Betreff der Divergenz die Uebereinstimmung dieser Reihen mit den Potenzreihen festzustellen, bleibt der Nachweis zu führen, dass die Reihe $\eta = 1+k_1x+\cdots$ für $m=\infty$ *von Null verschieden* ist.

Aus der im vorigen Paragraphen bewiesenen Ungleichheit

$$\text{mod.}\,k_\nu < \frac{(l+1)(l+2)\dots(l+\nu)}{1.2\dots\nu}\,\frac{\omega^\nu}{r^\nu}$$

folgt, dass der Modul des Restes der Reihe η, von irgend einem Term an gerechnet, kleiner als der entsprechende Rest der Reihenentwicklung von $\left(1-\frac{\omega}{r}\right)^{-l-1}$ ist. Man bezeichne durch ε eine kleine, jedoch endliche Zahl, und bestimme den Index μ derartig, dass der mit der Potenz $\omega^{\mu+1}$ beginnende Rest der Reihenentwicklung von $\left(1-\frac{\omega}{r}\right)^{-l-1}$, $\sum\limits_{\nu=\mu+1}^{\nu=\infty}\frac{(l+1)(l+2)\dots(l+\nu)}{1.2\dots\nu}\,\frac{\omega^\nu}{r^\nu}$, gleich ε ist oder ε möglichst nahe kommt. Dann ist:

$$\text{mod.}\,(k_{\mu+1}x^{\mu+1}+k_{\mu+2}x^{\mu+2}+\cdots\text{ in inf.}) < \varepsilon.$$

Die Zahl μ ist eine endliche Zahl, die je nach der Wahl von ε verschiedene Werthe hat, die aber von m unabhängig ist. Die Summe der $\mu+1$ ersten Terme von η möge mit η_1 bezeichnet werden; dann unterscheidet sich, gemäss der obigen Ungleichheit, die unendliche Reihe η von der ganzen Function μ^{ten} Grades η_1 nur um eine Grösse, deren Modul kleiner als ε ist. Der Werth dieser ganzen Function $\eta_1 = 1+k_1x+\cdots+k_\mu x^\mu$ für ein unbegrenzt grosses m wird nun ohne Schwierigkeit gefunden. Da μ eine bestimmte endliche Zahl ist, so ist für die Ermittelung des asymptotischen Werthes von η_1 die Zahl m als beliebig gross gegen μ anzusehen, d. h. der Quotient $\frac{m}{\mu}$, und ebenso z. B. $\frac{m}{\mu^2}$ und $\frac{m}{\mu^\mu}$, ist grösser als jede angebbare Zahl. Mit andern

Worten bedeutet dies, dass man zuerst m ins Unendliche wachsen lässt, während μ als endlich gilt, und dass man erst dann für μ einen unbegrenzt grossen Werth setzt.

Wenn man in die durch m dividirte Differentialgleichung (4.)

$$\frac{x}{m}\frac{d^2\eta}{dx^2}+\left[2+\frac{1}{m}(b+b_1x+b_2x^2+\cdots)\right]\frac{d\eta}{dx}$$
$$+\left[b_1+b_2x+b_3x^2+\cdots+\frac{1}{m}(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots)\right]\eta = 0$$

für η die Reihe $1+k_1x+k_2x^2+\cdots$ einsetzt, so folgt für den beliebigen Coefficienten k_ν die Gleichung:

$$k_\nu = \frac{-1}{2\nu\left(1+\frac{b+\nu-1}{2m}\right)}\left\{\left(b_1+\frac{(\nu-1)b_1+c_1}{m}\right)k_{\nu-1}+\left(b_2+\frac{(\nu-2)b_2+c_2}{m}\right)k_{\nu-2}+\cdots\right\}.$$

Zur Berechnung der Function η_1 hat man ν höchstens gleich der Zahl μ, gegen welche m beliebig gross ist, zu nehmen. Die durch m dividirten Ausdrücke, welche auf der rechten Seite der letzterhaltenen Gleichung vorkommen, sind daher als verschwindend klein anzusehen, so dass sich bis auf einen beliebig kleinen Fehler

$$k_\nu = \frac{-1}{2\nu}\{b_1k_{\nu-1}+b_2k_{\nu-2}+\cdots+b_{\nu-1}k_1+b_\nu\}$$

ergiebt. Da zur Bestimmung von $k_1, \ldots k_\mu$ nur die ersten μ Gleichungen erforderlich sind, also nur eine endliche Zahl von Rechnungsoperationen vorzunehmen ist, so ist die wiederholte Addition der Fehler ohne Einfluss auf das Resultat. Die obige recurrirende Gleichung

$$k_\nu = \frac{-1}{2\nu}\{b_1k_{\nu-1}+b_2k_{\nu-2}+\cdots+b_{\nu-1}k_1+b_\nu\}$$

entspricht aber, wie man leicht erkennt, derjenigen Differentialgleichung, welche entsteht, wenn man in der Differentialgleichung für η die durch m dividirten Glieder direct fortlässt, d. h. der Differentialgleichung

$$2\frac{d\eta_2}{dx}+(b_1+b_2x+b_3x^2+\cdots)\eta_2 = 0,$$

als deren Integral, wenn man die willkürliche Constante durch die Bedingung $\eta_2=1$ für $x=0$ bestimmt, sich der Ausdruck

$$\eta_2 = e^{-\frac{1}{2}(b_1x+\frac{1}{2}b_2x^2+\frac{1}{3}b_3x^3+\cdots)}$$

ergiebt. Die ganze Function μ^{ten} Grades η_1 unterscheidet sich demnach von

der Summe der $\mu+1$ ersten Terme der Entwicklung von η_2 nach steigenden Potenzen von x nur um eine Grösse, welche unbegrenzt klein ist, sobald man den Quotienten $\frac{m}{\mu}$ genügend gross nimmt.

Die genannte Entwicklung von η_2 ist aber convergent, weil der Exponent von e eindeutig und endlich ist; folglich unterscheidet sich die genannte Summe der $\mu+1$ ersten Terme derselben von dem Werthe der unendlichen Reihe nur um eine beliebig kleine Grösse, wenn μ genügend gross, d. h. ε genügend klein genommen wird. Dies zeigt, dass für ein unbegrenzt grosses m die Differenz $\eta_1-\eta_2$ eine Grösse ist, welche mit ε zugleich gegen Null convergirt. Dasselbe gilt von der Differenz $\eta-\eta_2$, da nach der Definition von η_1 auch die Differenz $\eta-\eta_1$ zugleich mit ε gleich Null wird. Es ist somit in aller Strenge bewiesen, dass der Werth der Reihe

$$\eta = x^{-m}P_m(x) = 1+k_1x+k_2x^2+\cdots \text{ in inf.}$$

sich von dem Ausdrucke

$$e^{-\frac{1}{2}(b_1x+\frac{1}{2}b_2x^2+\frac{1}{3}b_3x^3+\cdots)}$$

um weniger als eine beliebig gewählte noch so kleine Zahl unterscheidet, sobald für m eine hinreichend grosse Zahl gesetzt wird.

Die Reihe $b_1x+\frac{1}{2}b_2x^2+\frac{1}{3}b_3x^3+\cdots$ ist, ebenso wie $g(x)$, für mod. $x<\varrho$ eindeutig und stetig, so dass die obige asymptotische Function η_2 für mod. $x<\varrho$ stets von Null verschieden bleibt. Folglich ist auch, sobald m genügend gross genommen wird, die Function $\eta = x^{-m}P_m(x)$ für mod. $x<\varrho$ um eine endliche Zahl von Null verschieden.

Man kann also, wenn ω, der Modul von x, um eine endliche Grösse kleiner als ϱ vorausgesetzt wird, eine reelle positive, von Null verschiedene und von m unabhängige Constante L' von der Beschaffenheit angeben, dass die Ungleichheit mod. $\eta > L'$ oder

$$(8.) \qquad \text{mod.} P_m(x) > L'\omega^m$$

für alle Werthe von m, die eine gewisse endliche Zahl übersteigen, besteht.

§. 5. Mit Hülfe der Ungleichheiten (7.) und (8.) lässt sich nun leicht beweisen, dass die Grenze des Convergenzgebietes einer beliebigen Reihe

$$\beta_0P_0(x)+\beta_1P_1(x)+\beta_2P_2(x)+\cdots \text{ in inf.}$$

ein *Kreis* sein muss, da die bekannten Schlüsse in Betreff der Potenzreihen hier unmittelbar Anwendung finden. Die Grössen β_0, β_1, ... bedeuten Constanten. Der Modul von x wird kleiner als ϱ vorausgesetzt.

Man bezeichne durch τ eine endliche ganze Zahl, welche so gross ist, dass für $P_\tau(x)$ und alle Functionen P mit grösserem Index die Ungleichheiten (7.) und (8.) gelten. Die Summe der τ ersten Terme

$$\beta_0 P_0(x)+\beta_1 P_1(x)+\cdots+\beta_{\tau-1} P_{\tau-1}(x)$$

hat einen endlichen Werth, da die Functionen $P_0(x)$, ... $P_{\tau-1}(x)$ endlich bleiben. Die Convergenz der Reihe hängt daher von dem Rest

$$\beta_\tau P_\tau(x)+\beta_{\tau+1} P_{\tau+1}(x)+\cdots \text{ in inf.}$$

ab. Man setzt nun voraus, dass die Reihe

$$\beta_0 P_0(x)+\beta_1 P_1(x)+\beta_2 P_2(x)+\cdots \text{ in inf.}$$

für einen Werth $x = x_0$, dessen Modul durch ω_0 bezeichnet werden möge, convergent ist, und man will zeigen, dass dieselbe dann auch für jeden Werth von x, dessen Modul kleiner als ω_0 ist, convergirt.

Zu diesem Behufe soll zunächst bewiesen werden, dass die aus reellen positiven Summanden zusammengesetzte Reihe

$$T = \text{mod.}\frac{P_\tau(x)}{P_\tau(x_0)}+\text{mod.}\frac{P_{\tau+1}(x)}{P_{\tau+1}(x_0)}+\text{mod.}\frac{P_{\tau+2}(x)}{P_{\tau+2}(x_0)}+\cdots \text{ in inf.}$$

convergirt, sobald $\text{mod.}\,x < \text{mod.}\,x_0$ ist. Aus (7.) und (8.) ergiebt sich

$$\text{mod.}\,P_m(x) < L\omega^m, \quad \text{mod.}\,P_m(x_0) > L'\omega_0^m.$$

Durch Vergrösserung der Zähler und Verkleinerung der Nenner in $\text{mod.}\frac{P_\tau(x)}{P_\tau(x_0)}$ etc. erhält man daher die Ungleichheit

$$T < \sum_{m=\tau}^{m=\infty} \frac{L\omega^m}{L'\omega_0^m}$$

oder, da die Constanten L und L' von m unabhängig sind,

$$T < \frac{L}{L'}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\tau \sum_{m=0}^{m=\infty}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^m = \frac{L}{L'}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\tau \frac{1}{1-\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Der rechts stehende Ausdruck hat für $\omega < \omega_0$ einen endlichen Werth und nähert sich mit wachsendem τ der Grenze Null, wodurch die Convergenz von T für $\text{mod.}\,x < \text{mod.}\,x_0$ erwiesen ist.

Aus der Reihe T erhält man wieder eine convergente Reihe, wenn man die einzelnen Summanden mit Grössen, die endlich sind, multiplicirt. Nun ist nach der Voraussetzung die Reihe

$$\beta_\tau P_\tau(x_0)+\beta_{\tau+1} P_{\tau+1}(x_0)+\cdots \text{ in inf.}$$

convergent, so dass kein Term derselben einen unendlichen Modul hat. Multiplicirt man also die einzelnen Summanden von T bezüglich mit den Factoren

$$\text{mod.}[\beta_\tau P_\tau(x_0)], \quad \text{mod.}[\beta_{\tau+1} P_{\tau+1}(x_0)], \quad \ldots,$$

so convergirt auch die hierdurch entstehende Reihe

$$\sum_{m=r}^{m=\infty} \text{mod.}\frac{P_m(x)}{P_m(x_0)}\text{mod.}[\beta_m P_m(x_0)] = \sum_{m=r}^{m=\infty} \text{mod.}[\beta_m P_m(x)],$$

sobald $\text{mod.}\,x < \text{mod.}\,x_0$ ist. Nach einem bekannten Satze folgt aber hieraus die Convergenz der Reihe $\sum_{m=r}^{m=\infty}\beta_m P_m(x)$ und somit auch der Reihe

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\beta_m P_m(x)$$

für $\text{mod.}\,x < \text{mod.}\,x_0$.

Da demnach die Convergenz der betrachteten Reihe für irgend einen bestimmten Werth von x stets die Convergenz derselben für alle Werthe x mit kleinerem Modul nach sich zieht, so ist die Möglichkeit ausgeschlossen, dass die Begrenzung des Convergenzgebietes eine andere Curve als ein Kreis sei. Man hat also den Satz:

Die Grenze des Convergenzgebietes einer beliebigen Reihe

$$\beta_0 P_0(x)+\beta_1 P_1(x)+\beta_2 P_2(x)+\cdots \text{ in inf.},$$

in welcher die Functionen $P_m(x)$ durch die Gleichungen (2.) *und* (3.) *definirt sind, und β_0, β_1, β_2, ... Constanten bedeuten, ist stets ein Kreis, falls die Reihe überhaupt für irgend einen Werth von x convergirt.* *)

Die angestellte Untersuchung bezieht sich ausschliesslich auf das den Punkt $x=0$ umgebende Flächenstück der x-Ebene, für welches der Modul von x um eine endliche Zahl kleiner als ϱ ist, oder, wie man es kurz aussprechen kann, auf die Kreisfläche mit dem Mittelpunkt $x=0$ und dem Radius ϱ unter Ausschluss ihrer Peripherie. Ausserhalb dieser Kreisfläche ist die Reihe $x^m\{1+k_1x+\cdots\}$, als welche $P_m(x)$ definirt wurde, im Allgemeinen divergent. Daher kann es sich ausserhalb jener Fläche, also für $\text{mod.}\,x > \varrho$, im Allgemeinen nicht mehr um die hier definirten eindeutigen Functionen $P_m(x)$, sondern nur um stetige Fortsetzungen derselben handeln. Auf eine Reihe $\beta_0 P_0(x)+\beta_1 P_1(x)+\cdots$, welche nicht allein für $\text{mod.}\,x < \varrho$, sondern auch für gewisse Gebiete, wo $\text{mod.}\,x > \varrho$ ist, convergirt, bezieht sich der oben bewiesene Satz über die Begrenzung des Convergenzgebietes nicht. Wenn aber eine Reihe $\beta_0 P_0(x)+\beta_1 P_1(x)+\cdots$ für gewisse Theile jener Kreisfläche convergent, für andere divergent ist, so kann die Grenze des Convergenzgebietes nur ein Kreis mit dem Mittelpunkt $x=0$ sein.

*) Ich möchte nicht unerwähnt lassen, dass die Methode, asymptotische Werthe mit Hülfe einer linearen Differentialgleichung herzuleiten, zuerst von Herrn *Thomé* im 66. Bande dieses Journals bei Untersuchungen über hypergeometrische Kettenbrüche und über Reihen, die nach Kugelfunctionen fortschreiten, angewandt worden ist.

In dem Falle, dass zu der Differentialgleichung (2.) kein anderer singulärer Punkt als $x=0$ und $x=\infty$ gehört, dass also die Functionen $g(x)$ und $h(x)$ für keinen endlichen Werth von x unstetig oder mehrdeutig werden, gelten die abgeleiteten Sätze für die ganze Ebene; die Reihe (3.) ist alsdann für jeden endlichen Werth von x convergent.

Abschnitt II.

Definition der Ergänzungsfunction $Q_n(x)$.

§. 6. Mit den Functionen $P_m(x)$ verbindet man eine zweite Gattung von Functionen, welche als *Ergänzungsfunctionen* der P bezeichnet werden sollen. Dieselben dienen zur Bestimmung der Coefficienten bei der Entwicklung der beliebigen Function $\varphi(x)$ nach den Functionen P.

Die Function $P_m(x)$ wurde durch die Differentialgleichung (2.)

$$x^2\frac{d^2P_m}{dx^2}+g(x)\frac{dP_m}{dx}+h(x)P_m = m(m+b-1)P_m$$

definirt, in welcher die Constante b oder $[x^{-1}g(x)]_{x=0}$ nach der Voraussetzung weder gleich einer negativen ganzen Zahl noch gleich Null sein sollte. Bei der Definition der Ergänzungsfunctionen hat man zu unterscheiden, ob die Constante b eine positive ganze Zahl ist, oder nicht. Ist b *nicht ganzzahlig*, so definirt man, für $n=0, 1, 2, \ldots$, die Ergänzungsfunction $Q_n(x)$ als dasjenige particuläre Integral der Differentialgleichung

$$(9.)\qquad \frac{d^2}{dx^2}(x^2Q_n)-\frac{d}{dx}(g(x)Q_n)+h(x)Q_n = n(n+b-1)Q_n,$$

welches durch eine Reihe von der Form

$$(10.)\qquad Q_n(x) = x^{-n-1}\{1+K_1x+K_2x^2+\cdots\}$$

dargestellt wird. Man erkennt, dass die Gleichung (9.) mit der Differentialgleichung des *integrirenden Factors*, welcher zur Differentialgleichung von $P_n(x)$ gehört, identisch ist.

Ist aber b eine *positive ganze Zahl*, so soll die Function $Q_n(x)$ durch die nicht homogene Differentialgleichung

$$(11.)\qquad \frac{d^2}{dx^2}(x^2Q_n)-\frac{d}{dx}(g(x)Q_n)+h(x)Q_n = n(n+b-1)Q_n+Ax^\gamma,$$

in welcher A und γ passend zu bestimmende Constanten bedeuten, definirt werden, indem wieder die Bedingung hinzugefügt wird, dass dieselbe die Gestalt der Reihe (10.) habe. Die Constante γ ist eine positive ganze Zahl und wird im allgemeinen Falle gleich $n+b-2$ genommen werden.

Es ist zunächst zu beweisen, dass die Function $Q_n(x)$ durch die obige Definition als *convergente* Reihe definirt ist. Man vereinigt die beiden hier unterschiedenen Fälle, indem man die Differentialgleichung (11.) behandelt und A gleich Null setzt, wenn b keine ganze Zahl ist. Um die Existenz eines particulären Integrals von der Form $x^{-n-1}\{1+K_1x+\cdots\}$ zu beweisen, nimmt man ein mit der Potenz x^{n+b-2} beginnendes particuläres Integral von (9.) zu Hülfe.

In der Differentialgleichung (9.)

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^2y)-\frac{d}{dx}(g(x)y)+h(x)y = n(n+b-1)y$$

setze man $y = x^{n+b-2}\zeta$; dann ergiebt sich für ζ die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2\zeta}{dx^2}+\left(2n+2b-\frac{1}{x}g(x)\right)\frac{d\zeta}{dx}$$
$$+\left(\frac{b(n+b-1)-g'(x)+h(x)}{x}-\frac{(n+b-2)g(x)}{x^2}\right)\zeta = 0$$

oder

$$x\frac{d^2\zeta}{dx^2} = (-2n-b+b_1x+b_2x^2+\cdots)\frac{d\zeta}{dx}$$
$$+(b_1(n+b)-c_1+[b_2(n+b+1)-c_2]x+\cdots)\zeta.$$

Diese Differentialgleichung besitzt die Form der Gleichung (5.) in §. 3, während die dem Coefficienten δ_0 entsprechende Constante $-2n-b$ weder Null noch eine positive ganze Zahl ist; dieselbe hat also eine convergente Reihe

$$\zeta_1 = 1+C_1x+C_2x^2+\cdots$$

zum particulären Integral. Aus der Convergenz der Reihe ζ_1 folgt ausserdem, dass für kleine Werthe von x auch der reciproke Werth $\frac{1}{\zeta_1}$ eine eindeutige und endliche Function ist. — Das zugehörige particuläre Integral von (9.) nenne man $y_1 = x^{n+b-2}\zeta_1$. Vermittelst y_1 lässt sich dann bekanntlich die Differentialgleichung (11.) allgemein integriren.

Das vollständige Integral einer Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\psi(x)\frac{dv}{dx}+\psi_1(x)v = \psi_2(x)$$

wird, wenn y_1 ein particuläres Integral der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\psi(x)\frac{dy}{dx}+\psi_1(x)y = 0$$

ist, durch die Substitution $v = y_1\int w\,dx$ erhalten, wo dann w, nach der Theorie

der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, gleich dem Ausdrucke

$$w = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int\psi(x)dx} \left\{ \int \psi_2(x) y_1 e^{\int\psi(x)dx} dx + \text{Const.} \right\}$$

gefunden wird. Wenn man dies auf die Differentialgleichung (11.) anwendet, so ist

$$\psi(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} g(x) = \frac{4-b}{x} - b_1 - b_2 x - \cdots,$$
$$\psi_2(x) = A x^{\gamma-2}$$

zu nehmen. Also ist $e^{-\int\psi(x)dx} = x^{b-4} e^{b_1 x + \frac{1}{2} b_2 x^2 + \cdots}$; und wenn man die Bezeichnung

$$\frac{1}{\zeta_1^2} e^{b_1 x + \frac{1}{2} b_2 x^2 + \cdots} = E_3(x), \quad \zeta_1 e^{-(b_1 x + \frac{1}{2} b_2 x^2 + \cdots)} = E_4(x)$$

einführt, so folgt

$$\frac{1}{y_1^2} e^{-\int\psi(x)dx} = x^{-2n-b} E_3(x), \quad y_1 e^{\int\psi(x)dx} = x^{n+2} E_4(x).$$

Die Functionen $E_3(x)$ und $E_4(x)$ sind, wie sich aus dem Vorhergehenden ergiebt, in der Umgebung von $x=0$ eindeutige und stetige Functionen, die für $x=0$ den Werth 1 annehmen; dieselben sind daher in convergente Reihen von der Form

$$E_3(x) = 1 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \cdots, \quad E_4(x) = 1 + \sigma_1' x + \sigma_2' x^2 + \cdots$$

entwickelbar. Man erhält auf diese Weise

$$w = x^{-2n-b} E_3(x) \left\{ \int A x^{\gamma+n} E_4(x) dx + \text{Const.} \right\}.$$

In dem Falle, dass b keine ganze Zahl, und deshalb A gleich Null ist, wird

$$w = \text{Const.}\, x^{-2n-b} \{1 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \cdots\},$$
$$\int w\, dx = \text{Const.} \left\{ \frac{x^{1-2n-b}}{1-2n-b} + \frac{\sigma_1 x^{2-2n-b}}{2-2n-b} + \frac{\sigma_2 x^{3-2n-b}}{3-2n-b} + \cdots \right\}.$$

Der letztere Ausdruck ist frei von logarithmischen Gliedern, weil in der Entwicklung von w die Potenz x^{-1} nicht vorkommt. Die willkürliche Constante nehme man gleich $1-2n-b$, damit die Anfangspotenz den Coefficienten 1 hat. Durch die Multiplication mit $y_1 = x^{n+b-2}\zeta_1$ tritt die Potenz x^{-n-1} vor die Klammer, und es ergiebt sich das gesuchte particuläre Integral von (9.) in Gestalt der convergenten Reihe

$$Q_n = x^{-n-1} \{1 + K_1 x + K_2 x^2 + \cdots\}.$$

Es existirt nur ein einziges Integral von dieser Form, da das andere parti-

culäre Integral von (9.), $y_1 = x^{n+b-2}\{1+C_1x+\cdots\}$, irrational ist. Die Function $Q_n(x)$ ist also für ein nicht ganzzahliges b durch die Gleichungen (9.) und (10.) in eindeutiger Weise definirt.

Wenn dagegen b eine positive ganze Zahl ist, so enthält w im Allgemeinen die Potenz x^{-1}, so dass durch die Integration von w ein Summandus Const. $\log x$ eingeführt wird. Es handelt sich nun darum, A und γ in der Gleichung (11.) so zu wählen, dass der Coefficient der Potenz x^{-1} in der Reihenentwicklung von w gleich Null wird. Dieser Anforderung kann auf verschiedene Weise genügt werden; jedoch ergiebt sich A, sobald der Werth von γ festgesetzt ist. Es soll hier für den allgemeinen Fall eine Bestimmung getroffen werden, welche stets zum Ziele führt, wenn auch bei vielen Gleichungen eine andere Wahl der Constanten zweckmässiger ist. Der Exponent γ soll nämlich gleich $n+b-2$ gesetzt werden.

Wenn, wie vorhin, die Integrationsconstante gleich $1-2n-b$ genommen wird, besteht w, für $\gamma = n+b-2$, aus den zwei Summanden

$$(1-2n-b)x^{-2n-b}E_3(x) \quad \text{und} \quad Ax^{-2n-b}E_3(x)\int x^{2n+b-2}E_4(x)\,dx.$$

Der erstere Summandus enthält die Potenz x^{-1} nur in dem Term $(1-2n-b)\sigma_{2n+b-1}x^{-1}$. Der zweite Summandus ist:

$$Ax^{-2n-b}(1+\sigma_1x+\cdots)\int(x^{2n+b-2}+\sigma'_1x^{2n+b-1}+\cdots)\,dx$$

$$= Ax^{-1}(1+\sigma_1x+\cdots)\left\{\frac{1}{2n+b-1}+\frac{\sigma'_1x}{2n+b}+\cdots\right\}.$$

In demselben kommt die Potenz x^{-1} nur in dem Anfangsgliede $\frac{A}{2n+b-1}x^{-1}$ vor. Damit also die Potenz x^{-1} aus dem Ausdruck für w fortfalle, hat man zu setzen:

$$\frac{A}{2n+b-1} = -(1-2n-b)\sigma_{2n+b-1},$$

$$(12.) \qquad A = (2n+b-1)^2\sigma_{2n+b-1}, \quad \gamma = n+b-2.$$

In der vorstehenden Rechnung ist der Fall, wo sowohl b als n die kleinstmöglichen Werthe haben, $b=1$, $n=0$, auszunehmen, da dann $2n+b-1$ verschwindet. Indessen wird in diesem Falle $Q_n(x)$ mit $y_1 = x^{n+b-2}\zeta_1$ identisch, welches Integral für $b=1$, $n=0$ die Anfangspotenz x^{-1} hat; dies zeigt, dass die Gleichung (12.) auch hier gültig bleibt, indem A gleich Null zu nehmen ist. Es ist somit die Convergenz der Reihe $Q_0(x)$ für $b=1$ bewiesen; und dass nur *eine* solche Function $Q_0(x) = x^{-1}\{1+K_1x+\cdots\}$ existirt, folgt un-

mittelbar aus dem Umstand, dass das zweite particuläre Integral von (9.) im genannten Falle logarithmisch ist.

Es bleibt übrig, die Reihe $Q_n(x)$ aus dem Ausdruck des w herzustellen. w ist eine convergente Reihe mit dem Anfangsgliede $(1-2n-b)x^{-2n-b}$, in welcher die Potenz x^{-1} fehlt. Aus

$$w = (1-2n-b)\{x^{-2n-b}+\sigma_1 x^{1-2n-b}+\cdots\},$$
$$\int w\,dx = x^{1-2n-b}+\frac{1-2n-b}{2-2n-b}\sigma_1 x^{2-2n-b}+\cdots$$

erhält man durch Multiplication mit $y_1 = x^{n+b-2}\zeta_1$ das der Gleichung (11.) genügende particuläre Integral von der Form

$$Q_n(x) = x^{-n-1}\{1+K_1x+K_2x^2+\cdots\},$$

in welchem der Factor $1+K_1x+K_2x^2+\cdots$ eine convergente Reihe ist.

Die Reihe, als welche $Q_n(x)$ definirt wurde, ist hiermit in allen Fällen als convergent bewiesen. Indessen ist zu bemerken, dass wenn b eine positive ganze Zahl ist, $Q_n(x)$ durch die Gleichungen (10.), (11.), (12.) nicht vollständig bestimmt ist, weil das zweite particuläre Integral von (11.) ebenfalls rational ist. Denn die Hinzufügung einer willkürlichen Constante zu $\int w\,dx$ giebt einen Summandus

$$\text{Const.}\,y_1 = \text{Const.}\,x^{n+b-2}\{1+C_1x+C_2x^2+\cdots\},$$

durch den die Gestalt der Reihe (10.) nicht geändert wird. Dieser Summandus enthält jedoch niemals negative Potenzen von x, mit Ausnahme des besonders behandelten Falles $b=1$, $n=0$, für welchen die Eindeutigkeit von $Q_0(x)$ nachgewiesen wurde. Derjenige Theil der Reihe $Q_n(x)$, welcher die negativen Potenzen von x enthält, ist also stets eindeutig bestimmt, und es zeigt sich, dass für die folgenden Rechnungen nur dieser von Wichtigkeit ist.

Man bezeichne durch $q_n(x)$ die Summe der $n+1$ ersten Terme der Reihenentwicklung von $Q_n(x)$, also:

$$(13.)\qquad q_n(x) = x^{-n-1}\{1+K_1x+K_2x^2+\cdots+K_nx^n\}.$$

Dann ist die Function

$$Q_n(x) = q_n(x)+K_{n+1}+K_{n+2}x+K_{n+3}x^2+\cdots,$$

wenn b nicht ganzzahlig ist, durch (9.) und (10.) eindeutig definirt, während, falls b eine positive ganze Zahl ist, und daher die Gleichungen (10.), (11.), (12.) zur Anwendung kommen, die Reihe $K_{n+1}+K_{n+2}x+\cdots$ eine willkürliche Constante enthält. Aber für beide Fälle ist bewiesen:

1) dass $q_n(x)$ eindeutig bestimmt ist,

2) dass die Reihe $Q_n(x)$ convergent ist.

Diese Eigenschaften reichen aus, um die Coefficienten β der nach den Functionen P fortschreitenden Reihen auf die rationalen Functionen $q_n(x)$ zurückzuführen.

In Betreff der Constanten A, welche durch die Gleichung (12.) bestimmt wurde, möge bemerkt werden, dass man zu dem Werthe derselben auch von einem etwas anderen Gesichtspunkte aus gelangt. Setzt man in die Gleichung (9.) die Reihe $x^{-n-1}\{K_0+K_1x+\cdots\}$ für Q_n ein, so erhält man ein lineares Gleichungssystem für die Grössen K, und zwar hat, für ein beliebiges ν, der Coefficient K_ν in derjenigen Gleichung, welche ihn zuerst enthält und deshalb bestimmt, den Factor $\nu(\nu-2n-b+1)$. Es ist klar, dass wenn b eine positive ganze Zahl ist, dieser Factor für einen Werth von ν verschwindet, nämlich für $\nu=2n+b-1$. Hierdurch bleibt der Coefficient K_{2n+b-1} willkürlich, und die $2n+b-1^{\text{te}}$ Gleichung giebt nunmehr eine weitere Beschränkung für die Coefficienten K_0, K_1, ... K_{2n+b-2}, wodurch diese Grössen im Allgemeinen sämmtlich gleich Null werden. Durch Hinzufügung des Summandus Ax^{n+b-2} auf der rechten Seite der Differentialgleichung tritt nun aber A für K_{2n+b-1} ein und wird durch die $2n+b-1^{\text{te}}$ Gleichung bestimmt. Auf diese Weise werden, nachdem $K_0=1$ gesetzt ist, für K_1, K_2, ... K_{2n+b-2} und A eindeutige Werthe gefunden. — Aus diesen Betrachtungen geht ausserdem hervor, dass es nicht nothwendig ist, in der Gleichung (11.) grade die Potenz x^{n+b-2} für x^γ zu setzen, sondern dass im Allgemeinen auch eine niedrigere positive Potenz von x gewählt werden kann. Es kommt nur darauf an, durch Einführung von A zu verhindern, dass mehr Bestimmungsgleichungen als Unbekannte vorhanden sind. Ein Beispiel hierzu liefern die in den §§. 15—17 behandelten specielleren Differentialgleichungen, in denen man Ax^{n+b-2} durch A, respective Ax ersetzt und dadurch bewirkt, dass die Functionen $Q_n(x)$ nur negative Potenzen von x enthalten.

§. 7. Man bezeichne, wenn $F(x)$ eine nach steigenden oder nach steigenden und fallenden Potenzen von x entwickelbare Function ist, den Coefficienten der Potenz x^{-1} in dieser Entwicklung durch

$$[F(x)]_{-1}.$$

Dann bestehen für die Functionen $P_m(x)$ und die zugehörigen Ergänzungsfunctionen $Q_n(x)$, wenn m und n zwei von einander verschiedene, nicht ne-

gative ganze Zahlen sind, die Gleichungen:

$$(14.)\qquad [P_m(x)Q_n(x)]_{-1} = 0,\quad [P_m(x)Q_m(x)]_{-1} = 1.$$

Zum Beweise multiplicire man die Differentialgleichung (2.), durch welche $P_m(x)$ definirt wurde, mit $Q_n(x)$:

$$m(m+b-1)P_m Q_n = x^2 Q_n \frac{d^2P_m}{dx^2} + g\,Q_n \frac{dP_m}{dx} + h\,Q_n P_m.$$

Nun giebt die Formel

$$UdV = d(UV) - VdU$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 Q_n \frac{d^2P_m}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(x^2 Q_n \frac{dP_m}{dx}\right) - \frac{d(x^2Q_n)}{dx}\frac{dP_m}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}\left(x^2 Q_n \frac{dP_m}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{d(x^2Q_n)}{dx}P_m\right) + \frac{d^2(x^2Q_n)}{dx^2}P_m, \\ g\,Q_n \frac{dP_m}{dx} &= \frac{d}{dx}(g\,Q_n P_m) - \frac{d(gQ_n)}{dx}P_m, \end{aligned}$$

so dass man erhält

$$\begin{aligned} m(m+b-1)P_m Q_n &= \frac{d}{dx}\left[x^2 Q_n \frac{dP_m}{dx} - \frac{d(x^2Q_n)}{dx}P_m + g\,Q_n P_m\right] \\ &\quad + P_m\left[\frac{d^2(x^2Q_n)}{dx^2} - \frac{d(gQ_n)}{dx} + h\,Q_n\right]. \end{aligned}$$

Da alle Reihenentwicklungen nach steigenden Potenzen von x in dieser Gleichung convergent sind, so können die Coefficienten der Potenz x^{-1} auf der linken und rechten Seite einander gleich gesetzt werden. Der Ausdruck

$$\frac{d}{dx}\left[x^2 Q_n \frac{dP_m}{dx} - \frac{d(x^2Q_n)}{dx}P_m + g\,Q_n P_m\right]$$

enthält die Potenz x^{-1} nicht, da er der Differentialquotient einer convergenten Potenzreihe ist. Ferner besteht für Q_n die Differentialgleichung

$$\frac{d^2(x^2Q_n)}{dx^2} - \frac{d(gQ_n)}{dx} + h\,Q_n = n(n+b-1)\,Q_n + A\,x^\gamma,$$

die anwendbar ist, welchen Werth auch m habe, da die Constanten b, b_1, c_1, ... von m unabhängig sind. Man gelangt folglich, indem man die oben angegebene Bezeichnung für den Coefficienten von x^{-1} gebraucht, zu der Gleichung:

$$m(m+b-1)[P_m Q_n]_{-1} = n(n+b-1)[P_m Q_n]_{-1} + A[x^\gamma P_m]_{-1}.$$

Die Constante A ist für ein nicht ganzzahliges b gleich Null; ist b eine po-

sitive ganze Zahl, so ist nach der Voraussetzung auch γ eine solche, und das Product $x^\gamma P_m$ enthält nur positive Potenzen von x. In beiden Fällen ergiebt sich daher $A[x^\gamma P_m]_{-1} = 0$, wodurch man zu der Gleichung

$$\{m(m+b-1)-n(n+b-1)\}[P_m(x)Q_n(x)]_{-1} = 0$$

gelangt. Der Factor $m(m+b-1)-n(n+b-1)$ wird gleich Null für $n=m$ und für $n=1-m-b$. Die letztere Wurzel kommt jedoch nicht in Betracht, da nach der Voraussetzung m und n positive ganze Zahlen oder Null sein sollen, und der Fall, dass b eine negative ganze Zahl oder Null sei, ausgeschlossen wurde. Nur in dem einen Fall, wo $b=1$, $m=0$ ist, giebt die Zahl $1-m-b$ einen anwendbaren Werth für n, $n=0$; dieser stimmt jedoch alsdann mit der andern Wurzel $n=m$ überein. Also verschwindet nach den hier geltenden Voraussetzungen die Differenz

$$m(m+b-1)-n(n+b-1)$$

nur für $n=m$. In Folge dessen giebt die oben erhaltene Gleichung das Resultat, dass

$$[P_m(x)Q_n(x)]_{-1} = 0$$

ist, sobald m und n von einander verschieden sind.

Für $n=m$ ist

$$P_m(x)Q_m(x) = x^m\{1+k_1x+\cdots\}x^{-m-1}\{1+K_1x+\cdots\},$$

woraus, da die rechte Seite die Potenz x^{-1} mit dem Coefficienten 1 enthält, unmittelbar die Gleichung

$$[P_m(x)Q_m(x)]_{-1} = 1$$

folgt.

§. 8. Die Gleichungen (14.) wendet man dazu an, die in §. 2 vorkommenden Coefficienten β durch die Functionen Q auszudrücken. Die Grössen $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{\tau-1}$ waren so bestimmt worden, dass die beliebige, aber in der Umgebung von $x=0$ eindeutige und stetige Function $\varphi(x)$ im constanten Glied und in den $\tau-1$ ersten Potenzen von x mit $\beta_0P_0(x)+\cdots+\beta_{\tau-1}P_{\tau-1}(x)$ übereinstimmte. Die Gleichung

$$\beta_0P_0(x)+\cdots+\beta_{\tau-1}P_{\tau-1}(x) = \alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_{\tau-1}x^{\tau-1}+S,$$

in welcher S nur höhere Potenzen von x als die $\tau-1^{\text{te}}$ enthält, schreibe man nun in der Art, dass

$$\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_{\tau-1}x^{\tau-1} = \varphi(x)-\alpha_\tau x^\tau-\alpha_{\tau+1}x^{\tau+1}-\cdots$$

gesetzt wird, und multiplicire dieselbe mit $Q_\nu(x)$. In der hierdurch entste-

henden Gleichung

$$\beta_0 P_0(x) Q_\nu(x) + \beta_1 P_1(x) Q_\nu(x) + \cdots + \beta_{\tau-1} P_{\tau-1}(x) Q_\nu(x)$$
$$= \varphi(x) Q_\nu(x) + (S - \alpha_\tau x^\tau - \alpha_{\tau+1} x^{\tau+1} - \cdots) Q_\nu(x)$$

setzt man die Coefficienten der Potenz x^{-1} auf der linken und rechten Seite einander gleich; ν bezeichne eine beliebige der Zahlen $0, 1, 2, \ldots \tau-1$. Auf der linken Seite kommt, wie aus den Gleichungen (14.) hervorgeht, die Potenz x^{-1} allein in dem Product $P_\nu(x) Q_\nu(x)$ vor, in welchem sie den Coefficienten 1 hat. Der Coefficient von x^{-1} auf der linken Seite der obigen Gleichung ist also gleich β_ν. Auf der rechten Seite ist der Summandus

$$(S - \alpha_\tau x^\tau - \alpha_{\tau+1} x^{\tau+1} - \cdots) Q_\nu(x)$$

frei von negativen Potenzen von x, da $Q_\nu(x)$ auch für den grössten Werth des ν, $\nu = \tau-1$, keine höhere negative Potenz als $x^{-\tau}$ enthält. Unter Anwendung der im vorigen Paragraphen angegebenen Bezeichnung gewinnt man daher für die Constante β_ν die Gleichung:

$$\beta_\nu = [\varphi(x) Q_\nu(x)]_{-1}.$$

Der grösseren Uebersichtlichkeit halber soll in diesem Ausdruck der Buchstabe x durch u ersetzt werden. — Statt der Function Q_ν kann in der letzten Gleichung die rationale Function q_ν gesetzt werden. Denn nach der Definition von $q_\nu(x)$ hat man die Gleichung

$$Q_\nu(x) = q_\nu(x) + K_{\nu+1} + K_{\nu+2} x + K_{\nu+3} x^2 + \cdots.$$

Multiplicirt man dieselbe mit $\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots$, so kommt in dem Ausdruck

$$\varphi(x)(K_{\nu+1} + K_{\nu+2} x + K_{\nu+3} x^2 + \cdots)$$

die Potenz x^{-1} nicht vor, und es folgt $[\varphi(x) Q_\nu(x)]_{-1} = [\varphi(x) q_\nu(x)]_{-1}$. Da, wie in §. 6 bewiesen wurde, die Functionen $q_\nu(x)$ stets eindeutig definirt sind, so ergeben sich für die Coefficienten β völlig bestimmte Werthe.

Die gefundene Gleichung

$$(15.) \qquad \beta_\nu = [\varphi(u) Q_\nu(u)]_{-1} = [\varphi(u) q_\nu(u)]_{-1}$$

gilt für jeden endlichen Werth von ν. Falls also die Function $\varphi(x)$ überhaupt in eine convergente Reihe von der Form

$$\varphi(x) = \beta_0 P_0(x) + \beta_1 P_1(x) + \cdots \quad \text{in inf.}$$

entwickelt werden kann, muss es die Reihe

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} [\varphi(u) Q_\nu(u)]_{-1} P_\nu(x)$$

sein. Es bleibt übrig, die Convergenz der letzteren Reihe zu beweisen, zu welchem Behufe die Werthe der Coefficienten $[\varphi(u)Q_\nu(u)]_{-1}$ für ein unbegrenzt wachsendes ν untersucht werden sollen.

§. 9. Auf die Function $q_n(x)$ lässt sich fast genau dasselbe Verfahren anwenden, durch welches in §. 3 die Ungleichheit (7.) für $P_m(x)$ abgeleitet wurde. Man führt die Reihe

$$Q_n(x) = x^{-n-1}\{1+K_1x+\cdots+K_nx^n+K_{n+1}x^{n+1}+\cdots\}$$

in die Differentialgleichung (9.), respective (11.) ein, betrachtet aber nur die n Coefficienten $K_1, \dots K_n$, da die Function $q_n(x)$ allein diese enthält. Auf $K_1, \dots K_n$ bleibt der Term Ax^γ in (11.) ohne Einfluss, so dass sich aus (11.) dieselben Gleichungen ergeben, wie aus (9.).

Aus der Differentialgleichung (9.)

$$x^2\frac{d^2Q_n}{dx^2}-[(b-4)x+b_1x^2+b_2x^3+\cdots]\frac{dQ_n}{dx}$$
$$+[-(n+1)(n+b-2)+(c_1-2b_1)x+(c_2-3b_2)x^2+\cdots]Q_n = 0$$

folgt die Gleichung

$$\nu(2n+b-\nu-1)K_\nu = [b_1(n+2-\nu)+c_1-2b_1]K_{\nu-1}+[b_2(n+3-\nu)+c_2-3b_2]K_{\nu-2}+\cdots,$$

welche zeigt, dass die Constante b nur im Nenner, dagegen die Constanten $b_1, b_2, \dots c_1-2b_1, c_2-3b_2, \dots$ nur im Zähler der für die Grössen K resultirenden Ausdrücke enthalten sind. Die bei $b_1, b_2, \dots$ vorkommenden numerischen Coefficienten $n+2-\nu$, $n+3-\nu$, ... sind sämmtlich positiv, da nur die Werthe $\nu \leqq n$ in Betracht gezogen werden. Bezeichnet man ferner den reellen Theil von b durch b', so ist $\text{mod.}(2n+b'-\nu-1) \leqq \text{mod.}(2n+b-\nu-1)$, da in ersterer Zahl nur der imaginäre Theil fortgelassen ist; die Zahl n wird, da die Untersuchung nur grosse Werthe von n betrifft, grösser als $2+\text{mod.}\,b$ angenommen, so dass die Zahl $n+b'-2$ positiv ist.

Man nenne λ_1 und λ_2 zwei reelle positive Zahlen, welche die Moduln der nach der Voraussetzung convergenten Reihen

$$b_1+b_2x+b_3x^2+\cdots,$$
$$c_1-2b_1+(c_2-3b_2)x+(c_3-4b_3)x^2+\cdots$$

auf einer den Nullpunkt umgebenden Kreisfläche mit dem Radius r übertreffen. Ersetzt man dann in der Differentialgleichung der Function Q_n die obigen Reihen durch $\dfrac{\lambda_1}{1-\dfrac{x}{r}}$ und $\dfrac{\lambda_2}{1-\dfrac{x}{r}}$ und gleichzeitig b durch b': so erhält man ein

System von n reellen positiven Coefficienten $K'_1, K'_2, \dots K'_n$, welche grösser als die Moduln der entsprechenden Coefficienten $K_1, K_2, \dots K_n$ sind. Denn an Stelle der Constanten $b_1, b_2, \dots c_1-2b_1, c_2-3b_2, \dots$ in der obigen Gleichung für K_ν treten reelle positive Zahlen von grösserem absolutem Werthe, und da $\nu \leqq n$, $n+b'-2>0$ ist, so folgt $2n+b'-\nu-1>0$, wodurch die obige Ungleichheit $2n+b'-\nu-1 \leqq \text{mod.}(2n+b-\nu-1)$ wird. Für die Grössen $K'_1, \dots K'_n$, welche aus

$$x^2\frac{d^2v}{dx^2}-\left[(b'-4)x+\frac{\lambda_1 x^2}{1-\frac{x}{r}}\right]\frac{dv}{dx}+\left[-(n+1)(n+b'-2)+\frac{\lambda_2 x}{1-\frac{x}{r}}\right]v = 0$$

durch Einsetzen der Reihe

$$v = x^{-n-1}\{1+K'_1x+\dots+K'_nx^n+\dots\}$$

bestimmt werden, ergiebt sich die recurrirende Gleichung:

$$\frac{rK'_\nu}{K'_{\nu-1}} = 1+\frac{(r\lambda_1-2)(n-\nu)+2r\lambda_1+r\lambda_2-b'}{\nu(2n+b'-\nu-1)}.$$

Ersetzt man sowohl $r\lambda_1-2$ als $2r\lambda_1+r\lambda_2-b'$ durch eine grössere reelle positive Zahl λ, und ferner $2n+b'-\nu-1$ durch die kleinere Zahl $n-\nu+1$: so entsteht, für $\nu=1, 2, \dots n$, die Ungleichheit

$$\frac{rK'_\nu}{K'_{\nu-1}} < 1+\frac{\lambda(n-\nu+1)}{\nu(n-\nu+1)}, \quad K'_\nu < \left(1+\frac{\lambda}{\nu}\right)\frac{K'_{\nu-1}}{r}.$$

Da $K'_0 = 1$ ist, folgt hieraus

$$K'_1 < \frac{\lambda+1}{r}, \quad K'_2 < \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.2.r^2}, \quad \dots \quad K'_\nu < \frac{(\lambda+1)\dots(\lambda+\nu)}{1.2\dots\nu.r^\nu};$$

also ist um so mehr für $\nu = 1, 2, \dots n$:

$$\text{mod.}K_\nu < \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+\nu)}{1.2\dots\nu}\;\frac{1}{r^\nu}.$$

Für den Modul von $q_n(x) = x^{-n-1}\{1+K_1x+\dots+K_nx^n\}$ ergiebt sich demnach die Ungleichheit

$$\text{mod.}\,q_n(x) < \omega^{-n-1}\left\{1+\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+\nu)}{1.2\dots\nu}\;\frac{\omega^\nu}{r^\nu}\right\},$$

welche verstärkt wird, wenn man in der rechts stehenden Summe die Glieder von $\nu = n+1$ bis $\nu = \infty$ hinzufügt. Die unendliche Summe ist aber nach dem binomischen Satze gleich $\left(1-\frac{\omega}{r}\right)^{-\lambda-1}$, so dass die Ungleichheit

$$\text{mod.}\,q_n(x) < \omega^{-n-1}\left(1-\frac{\omega}{r}\right)^{-\lambda-1}$$

erhalten wird. Da die Potenz $\left(1-\frac{\omega}{r}\right)^{-\lambda-1}$ für $\omega < r$ ein positiver endlicher, von n unabhängiger Werth ist, so kann man eine positive, von n unabhängige Constante $\varDelta$ angeben, welche den Werth von $\left(1-\frac{\omega}{r}\right)^{-\lambda-1}$ auf der den Punkt $x=0$ umgebenden Kreisfläche, deren Radius kleiner als r ist, übertrifft. Die obige Ungleichheit wird daher verstärkt, wenn man die rechte Seite derselben durch $\varDelta\omega^{-n-1}$ ersetzt. Die Betrachtung gilt, nach der in §. 3 angewendeten Ausdrucksweise, für die ganze Kreisfläche, deren Mittelpunkt $x=0$ und deren Radius ϱ ist, mit Ausschluss der Peripherie.

Man gewinnt somit das Resultat, dass für $\text{mod.}\, x < \varrho$ und $n > 2+\text{mod.}\, b$ die Ungleichheit

$$(16.)\qquad \text{mod.}\, q_n(x) < \varDelta\omega^{-n-1}$$

besteht, in welcher $\varDelta$ eine reelle positive, von n unabhängige Constante bedeutet.

§. 10. Aus der Ungleichheit (16.) ergiebt sich eine andere, welche sich auf die Coefficienten β bezieht.

Die Coefficienten β, für welche die Gleichung (15.)

$$\beta_\nu = [\varphi(u)\, Q_\nu(u)]_{-1} = [\varphi(u)\, q_\nu(u)]_{-1}$$

gefunden wurde, können als bestimmte Integrale geschrieben werden. *) Man bezeichne durch R eine reelle positive Zahl, welche erstens kleiner als ϱ ist und zweitens die Eigenschaft hat, dass auch die Function $\varphi(x)$ auf der Kreisfläche mit dem Mittelpunkt $x=0$ und dem Radius R eindeutig und stetig ist. Ferner sei M eine reelle positive Constante, welche grösser ist als der Werth des Moduls von $\varphi(x)$ in irgend einem Punkte dieser Kreisfläche. Dann werde das Product $\varphi(u)\, q_\nu(u)$, welches gleich einer convergenten Reihe

$$\frac{N_0}{u^{\nu+1}}+\frac{N_1}{u^\nu}+\cdots+\frac{N_{\nu-1}}{u^2}+\frac{N_\nu}{u}+N_{\nu+1}+N_{\nu+2}u+\cdots$$

ist, nach u längs derjenigen Kreislinie integrirt, welche R zum Radius und den Punkt $u=0$ zum Mittelpunkt hat. Die Richtung, in welcher der Kreis durchlaufen wird, sei die positive. Setzt man $u=Re^{\vartheta i}$, $du=Rie^{\vartheta i}d\vartheta$, so hat die Variable ϑ die reellen Werthe von 0 bis 2π zu durchlaufen, und das betrachtete Integral ist:

$$Ri\int_0^{2\pi}\varphi(Re^{\vartheta i})\, q_\nu(Re^{\vartheta i})\, e^{\vartheta i}\, d\vartheta.$$

---

*) Man vergleiche in der Schrift des Herrn *C. Neumann* „Theorie der *Bessel*schen Functionen" (Leipzig, 1867) die analogen Entwicklungen für die Kugelfunctionen und die *Bessel*schen Functionen (§. 3 und §. 9 der erwähnten Schrift).

Die unbestimmte Integration der obigen Reihe giebt andererseits den Ausdruck

$$-\frac{N_0}{\nu u^\nu}-\frac{N_1}{(\nu-1)u^{\nu-1}}-\cdots-\frac{N_{\nu-1}}{u}+N_\nu \log u+N_{\nu+1}u+\cdots,$$

welcher bis auf das eine Glied $N_\nu \log u$ eindeutig ist. Bei der zum Ausgangspunkt zurückkehrenden Integration fallen deshalb sämmtliche Glieder der Reihe fort, mit Ausnahme jenes einen, welches $2\pi i N_\nu$ liefert, so dass das geschlossene Integral gleich $2\pi i N_\nu$ gefunden wird. Auf diese Weise erhält man, da N_ν nach der eingeführten Bezeichnung mit $[\varphi(u)q_\nu(u)]_{-1}$ identisch ist, die Gleichung

$$[\varphi(u)q_\nu(u)]_{-1} = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(Re^{\vartheta i})q_\nu(Re^{\vartheta i})e^{\vartheta i}d\vartheta.$$

Nun wird der Modul einer Summe vergrössert, wenn jeder einzelne Summandus durch eine reelle positive Zahl, die seinen Modul übersteigt, ersetzt wird; dasselbe gilt von dem bestimmten Integral, als der Grenze einer Summe. Der Modul von $q(Re^{\vartheta i})$ ist aber zufolge von (16.) für alle Werthe von ϑ kleiner als $\varDelta R^{-\nu-1}$, der Modul von $\varphi(Re^{\vartheta i})$ nach der Voraussetzung kleiner als M, und $\text{mod.}\, e^{\vartheta i}=1$. Ersetzt man daher jedes der Elemente des Integrals durch $M\varDelta R^{-\nu-1}d\vartheta$, so erhält man ein Integral von ausschliesslich reellen positiven Elementen, welches grösser als der Modul des früheren ist. Es ergiebt sich folglich, für $\nu > 2+\text{mod.}\, b$, die Ungleichheit

$$\text{mod.}[\varphi(u)Q_\nu(u)]_{-1} < \frac{R}{2\pi}M\varDelta R^{-\nu-1}\int_0^{2\pi}d\vartheta$$

oder

$$(17.)\qquad \text{mod.}[\varphi(u)Q_\nu(u)]_{-1} < M\varDelta R^{-\nu}.$$

Diese Ungleichheit liefert, da die Constanten M, $\varDelta$, R von ν unabhängig sind, die zum Convergenzbeweis erforderliche Grenzbestimmung. Bevor jedoch zum Convergenzbeweis selbst übergegangen wird, soll ein Fall der Differentialgleichung (2.), welcher im Vorhergehenden ausgeschlossen wurde, nachträglich behandelt werden.

§. 11. Es wurde bei den bisherigen Untersuchungen überall vorausgesetzt, dass in der Differentialgleichung des $P_m(x)$ die Constante b oder $[x^{-1}g(x)]_{x=0}$ weder eine negative ganze Zahl noch Null sei. Von dieser Beschränkung kann in gewissen Fällen abgesehen werden, nämlich dann, wenn *$g(x)$ eine ungrade, $h(x)$ eine grade Function von x, und die Constante b*

eine grade Zahl ist. Die Ergänzungsfunctionen Q werden in diesem Falle durch die Gleichungen (9.) und (10.) definirt.

Wenn $g(x)$ eine ungrade, $h(x)$ eine grade Function bedeutet, ist in der Differentialgleichung (4.), welche aus (2.) durch die Substitution $P_m(x) = x^m \eta$ hervorgeht, der Coefficient von $\frac{d\eta}{dx}$ eine grade, und der Coefficient von η eine ungrade Function von x. Durch die Substitution $x^2 = \xi$ erhält diese Differentialgleichung dann die Form:

$$\xi \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \left(m + \frac{b+1}{2} + \tfrac{1}{2} b_2 \xi + \cdots\right) \frac{d\eta}{d\xi} + \left(\frac{mb_2+c_2}{4} + \frac{mb_4+c_4}{4}\xi + \cdots\right)\eta = 0.$$

Die Coefficienten sind eindeutige Functionen von ξ, und da b als grade, also $\frac{b+1}{2}$ als gebrochen vorausgesetzt ist, so ist durch die angewendete Substitution der vorliegende Fall auf den, wo b nicht ganzzahlig ist, zurückgeführt. Der die Gleichung (5.) betreffende Satz und alle Schlüsse der Paragraphen 3–5 sind daher direct übertragbar, mit einer unerheblichen Modification des Beweises von (7.). — Ebenso wird die in §. 6 für ζ erhaltene Differentialgleichung durch $x^2 = \xi$ auf den Fall eines nicht ganzzahligen b reducirt, woraus die Anwendbarkeit der für $Q_n(x)$ abgeleiteten Sätze folgt.

Endlich gilt auch die Formel (14.)

$$[P_m(x) Q_n(x)]_{-1} = 0, \quad [P_m(x) Q_m(x)]_{-1} = 1.$$

Man erhält, wie in §. 7, mit Hülfe der Differentialgleichungen (2.) und (9.) die Gleichung

$$\{m(m+b-1) - n(n+b-1)\} [P_m(x) Q_n(x)]_{-1} = 0,$$

aus welcher $[P_m(x) Q_n(x)]_{-1} = 0$ folgt, falls nicht

$$m(m+b-1) - n(n+b-1) = 0$$

ist. Von letzterer Gleichung hat man indessen hier nicht allein die Wurzel $n = m$, sondern auch die Wurzel $n = 1-m-b$ zu berücksichtigen, da b eine negative ganze Zahl, also $1-m-b$ für kleine Werthe von m eine positive ganze Zahl ist. Es ist deshalb noch zu beweisen, dass in dem Product $P_m(x) Q_{1-m-b}(x)$ die Potenz x^{-1} nicht vorkommt. Aus den Differentialgleichungen (2.) und (9.) folgt aber, dass die Reihen

$$1 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots, \quad 1 + K_1 x + K_2 x^2 + \cdots$$

im vorliegenden Fall nur grade Potenzen von x enthalten, wodurch das Product $P_m(x) Q_{1-m-b}(x)$ gleich

$$x^{2m+b-2} \{1 + k_2 x^2 + k_4 x^4 + \cdots\} \{1 + K_2 x^2 + K_4 x^4 + \cdots\}$$

wird. Da b als grade vorausgesetzt ist, so kommen in dem letzteren Product nur grade Potenzen von x vor, wodurch auch für $n = 1-m-b$ die Gleichung

$$[P_m(x)\,Q_n(x)]_{-1} = 0$$

bewiesen ist. Die Coefficienten β werden in Folge dessen auch hier durch die Gleichung (15.) bestimmt.

Es wurde oben nachgewiesen, dass wenn $g(x)$ eine ungrade, $h(x)$ eine grade Function, und b eine grade ganze Zahl ist, dieselben Betrachtungen anwendbar sind wie im Falle eines nicht ganzzahligen b. Abgesehen von der erzielten Erweiterung der Sätze auf negative ganzzahlige Werthe von b, gelangt man hierdurch zu dem Resultat, dass wenn $g(x)$ eine ungrade, $h(x)$ eine grade Function, und b eine positive grade Zahl ist, die Differentialgleichung der Function $Q_n(x)$ sich auf die homogene Gleichung (9.) reducirt. In der That ergiebt sich die Constante A in der Gleichung (11.) dann immer gleich Null, da das allgemeine Integral von (9.) frei von Logarithmen ist.

Abschnitt III.

Convergenzbeweis; Ausdehnung der Theorie auf Reihen mit nicht kreisförmigem Convergenzgebiet.

§. 12. Die unendliche Summe

$$[\varphi(u)\,Q_0(u)]_{-1}P_0(x)+[\varphi(u)\,Q_1(u)]_{-1}P_1(x)+[\varphi(u)\,Q_2(u)]_{-1}P_2(x)+\cdots \text{ in inf.},$$

deren Convergenz zu beweisen ist, zerlege man in die zwei Theile

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\tau-1}[\varphi(u)\,Q_\nu(u)]_{-1}P_\nu(x)+\sum_{\nu=\tau}^{\nu=\infty}[\varphi(u)\,Q_\nu(u)]_{-1}P_\nu(x),$$

indem man durch τ eine endliche ganze Zahl bezeichnet. Dann lässt sich mit Hülfe der im Vorhergehenden abgeleiteten Ungleichheiten leicht zeigen, dass die Restsumme $\sum_{\nu=\tau}^{\nu=\infty}[\varphi(u)\,Q_\nu(u)]_{-1}P_\nu(x)$ beliebig klein gemacht werden kann, wenn für τ eine genügend grosse Zahl gesetzt wird.

Nach der Definition von R ist auf der Kreisfläche mit dem Mittelpunkt $x = 0$ und dem Radius R sowohl die Reihe

$$\varphi(x) = \alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots$$

als die Reihe

$$P_m(x) = x^m\{1+k_1 x+k_2 x^2+\cdots\}$$

convergent. Bezeichnet ν eine positive ganze Zahl, die grösser als $2+\text{mod.}\,b$ ist, so wurde einerseits für alle Punkte dieser Kreisfläche die Ungleichheit (7.)

$$\text{mod.}\,P_\nu(x) < L\omega^\nu,$$

andererseits die Ungleichheit (17.)

$$\text{mod.}[\varphi(u)Q_\nu(u)]_{-1} < MAR^{-\nu}$$

bewiesen, wo ω den Modul von x, und L, A, M drei von ν unabhängige reelle positive Constanten bedeuten.

Die Zahl τ werde grösser als $2+\text{mod.}b$ angenommen; dann sind die genannten Ungleichheiten auf jeden Term der Restsumme anwendbar. Wird also in der Summe $\sum_{\nu=\tau}^{\nu=\infty}[\varphi(u)Q_\nu(u)]_{-1}P_\nu(x)$ die Function $P_\nu(x)$ überall durch $L\omega^\nu$, und der Coefficient $[\varphi(u)Q_\nu(u)]_{-1}$ durch $MAR^{-\nu}$ ersetzt: so entsteht eine aus reellen positiven Gliedern bestehende Summe, die grösser als der Modul von $\sum_{\nu=\tau}^{\nu=\infty}[\varphi(u)Q_\nu(u)]_{-1}P_\nu(x)$ ist. Aus der Ungleichheit

$$\text{mod.}\sum_{\nu=\tau}^{\nu=\infty}[\varphi(u)Q_\nu(u)]_{-1}P_\nu(x) < \sum_{\nu=\tau}^{\nu=\infty} LMAR^{-\nu}\omega^\nu$$

ergiebt sich aber, da die Constanten L, M, A von ν unabhängig sind, und

$$\sum_{\nu=\tau}^{\nu=\infty} R^{-\nu}\omega^\nu = \left(\frac{\omega}{R}\right)^\tau\left\{1+\frac{\omega}{R}+\frac{\omega^2}{R^2}+\cdots\right\} = \left(\frac{\omega}{R}\right)^\tau\frac{1}{1-\frac{\omega}{R}}$$

ist, die folgende:

$$(18.)\qquad \text{mod.}\sum_{\nu=\tau}^{\nu=\infty}[\varphi(u)Q_\nu(u)]_{-1}P_\nu(x) < LMA\left(\frac{\omega}{R}\right)^\tau\frac{1}{1-\frac{\omega}{R}}.$$

Die Potenz $\left(\frac{\omega}{R}\right)^\tau$ ist für $\omega < R$ eine mit wachsendem τ beliebig klein werdende Grösse, während $\frac{1}{1-\frac{\omega}{R}}$ einen endlichen Werth hat. Der Modul der auf der linken Seite von (18.) stehenden Summe ist folglich, sobald man für τ eine hinreichend grosse endliche Zahl wählt, kleiner als jede noch so kleine angebbare Grösse, womit die Convergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}[\varphi(u)Q_\nu(u)]_{-1}P_\nu(x)$$

bewiesen ist.

Der Werth der Reihe ergiebt sich, gemäss den in §. 8 angestellten Rechnungen, gleich $\varphi(x)$. Da dieselbe für $\omega < R$ eindeutig und endlich ist, so kann sie in eine convergente Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}[\varphi(u)Q_\nu(u)]_{-1}P_\nu(x) = \alpha'_0+\alpha'_1x+\alpha'_2x^2+\cdots$$

entwickelt werden. Nun wurde in §. 8 gezeigt, dass die aus τ Gliedern bestehende Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\tau-1} [\varphi(u)\,Q_\nu(u)]_{-1} P_\nu(x)$$

in dem constanten Gliede und den Coefficienten der $\tau-1$ ersten Potenzen von x mit der Function $\varphi(x)$ übereinstimmt. Die Restsumme $\sum_{\nu=\tau}^{\nu=\infty}[\varphi(u)Q_\nu(u)]_{-1}P_\nu(x)$ enthält, wie aus der Definition der Functionen P folgt, nur höhere Potenzen von x als $x^{\tau-1}$. Also sind auch in der unendlichen Summe $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}[\varphi(u)Q_\nu(u)]_{-1}P_\nu(x)$ die erwähnten τ Coefficienten mit denen von $\varphi(x)$ identisch, und man hat die Gleichungen:

$$\alpha_0' = \alpha_0, \quad \alpha_1' = \alpha_1, \quad \ldots \quad \alpha_{\tau-1}' = \alpha_{\tau-1}.$$

Da aber diese Gleichungen bestehen, während τ eine ganz beliebige endliche Zahl bedeutet, so ist die Identität der beiden convergenten Reihen

$$\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots \text{ in inf.}$$

und

$$\alpha_0'+\alpha_1' x+\alpha_2' x^2+\cdots \text{ in inf.}$$

bewiesen.

Man erhält auf diese Weise für die *beliebige Function* $\varphi(x)$, wenn sie nur *auf einem den Punkt $x=0$ einschliessenden Flächenstück der x-Ebene eindeutig und stetig ist, die convergente, nach den Functionen P fortschreitende Entwicklung:*

$$(19.)\qquad \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}[\varphi(u)\,Q_\nu(u)]_{-1}P_\nu(x).$$

Die in der Definitionsgleichung (2.) vorkommenden Constanten $b, b_1, b_2, \ldots c_1, c_2, \ldots$ *bleiben beliebig,* bis auf die in §. 1 angegebenen Beschränkungen.

Die Reihen $x^m\{1+k_1x+\cdots\}$, als welche die Functionen $P_m(x)$ definirt sind, convergiren für $\text{mod.}\,x<\varrho$, wo ϱ den Abstand des Punktes $x=0$ vom nächstgelegenen singulären Punkte der Differentialgleichung (2.) bezeichnet. Wenn nun innerhalb der den Punkt $x=0$ umgebenden Kreisfläche mit dem Radius ϱ, jedoch abgesehen von der Peripherie, die Function $\varphi(x)$ irgendwo aufhört, eindeutig und stetig zu sein: so *fällt das Convergenzgebiet der Reihe* (19.) *genau mit dem der Potenzreihe*

$$\varphi(x) = \alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots$$

zusammen. In §. 5 wurde gezeigt, dass das Convergenzgebiet der Reihe (19.),

wie bei den Potenzreihen, ein Kreis mit dem Mittelpunkt $x = 0$ ist. Dieser Kreis kann aber einerseits nicht grösser als der Convergenzkreis von $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$ sein, da bei der letzteren Reihe die Divergenz nur dann eintritt, wenn $\varphi(x)$ unstetig oder mehrdeutig wird. Derselbe kann andererseits auch nicht kleiner als jener sein, da durch die Ungleichheit (18.) die für die Convergenz von $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$ erforderliche Einschränkung des Moduls von x, nämlich $\omega < R$, genau auf die Reihe (19.) übertragen wird.

Ist die Potenzreihe $\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$ für dasselbe Gebiet oder für ein noch grösseres convergent, wie die Reihen $P_m(x) = x^m\{1 + k_1 x + \cdots\}$, so ist die Gültigkeit der Entwicklung (19.) für die ganze Kreisfläche mit dem Mittelpunkt $x = 0$ und dem Radius ϱ, jedoch mit Ausschluss der Peripherie, bewiesen.

In dem Falle, dass in der Differentialgleichung (2.) die Functionen $g(x)$ und $h(x)$ für alle endlichen Werthe von x eindeutig und stetig bleiben, ist jede beliebige Function von x stets auf genau demselben Flächengebiete nach diesen Functionen P entwickelbar, wie sie nach positiven ganzen Potenzen von x entwickelt werden kann.

§. 13. Die in den vorstehenden Rechnungen erhaltenen Resultate lassen sich mit Hülfe einer Substitution erheblich verallgemeinern. Die Differentialgleichung (2.) giebt diejenigen Functionen $P(x)$, welche sich den Potenzen von x am nächsten anschliessen, in der Art, dass die nach ihnen fortschreitenden Reihen ein kreisförmig begrenztes Convergenzgebiet haben. Im Folgenden soll nun eine Differentialgleichung betrachtet werden, welche sich von (2.) darin unterscheidet, dass als Coefficient der höchsten Ableitung nicht x^2, sondern eine beliebige mit x^2 beginnende Potenzreihe, $x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + \cdots$, steht. Durch diese Differentialgleichung wird *eine neue Gattung von Functionen* $P(x)$ definirt, nach denen sich ebenfalls jede in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige und stetige Function $\varphi(x)$ entwickeln lässt; jedoch ist die Grenze des Convergenzgebietes *nicht mehr ein Kreis,* sondern eine andere, in jedem einzelnen Fall direct bestimmbare Curve. Diese letzteren Functionen $P(x)$ werden durch Einführung einer andern unabhängigen Variablen auf die bisher betrachteten reducirt.

Man definirt die allgemeinere Function $P_m(x)$ durch die Differentialgleichung

$$(20.)\quad f(x)\frac{d^2P_m}{dx^2} + g(x)\frac{dP_m}{dx} + h(x)P_m = m(m+b-1)P_m,$$

in welcher durch $f(x)$ eine convergente Reihe

$$f(x) = x^2(1+a_1x+a_2x^2+\cdots),$$

und durch $g(x)$ und $h(x)$, wie bisher, die Reihen (1.) bezeichnet werden. Die Constanten $a_1, a_2, \ldots$ werden ebenfalls als unabhängig von m vorausgesetzt, sind aber sonst beliebig.

Man führe statt x eine Variable ξ ein, welche man durch die Gleichung

$$(21.) \qquad \frac{d\xi}{\xi} = \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \qquad \xi = e^{\int\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}}$$

bestimmt, indem man für die Quadratwurzel das positive Vorzeichen festsetzt. Bezeichnet man $\frac{d\xi}{dx}$ kurz durch χ, so ergiebt sich:

$$\frac{dP_m}{dx} = \frac{dP_m}{d\xi}\chi = \frac{dP_m}{d\xi}\,\frac{\xi}{\sqrt{f(x)}},$$

$$\frac{d^2P_m}{dx^2} = \frac{d^2P_m}{d\xi^2}\,\frac{\xi^2}{f(x)} + \frac{dP_m}{d\xi}\,\frac{d\chi}{d\xi}\chi.$$

Die Differentialgleichung (20.) verwandelt sich hierdurch in die Gleichung

$$(22.) \qquad \xi^2\frac{d^2P_m}{d\xi^2} + \Big(f(x)\frac{d\chi}{d\xi} + g(x)\Big)\chi\frac{dP_m}{d\xi} + h(x)P_m = m(m+b-1)P_m,$$

von der gezeigt werden soll, dass sie die nämliche Form in Bezug auf ξ hat, wie die Differentialgleichung (2.) in Bezug auf x. Es sind zu diesem Behuf die Coefficienten von $\frac{dP_m}{d\xi}$ und P_m in (22.) als Functionen von ξ herzustellen.

Die convergente Reihe $x^{-2}f(x) = 1+a_1x+a_2x^2+\cdots$ ist innerhalb eines geissen endlichen Abstandes vom Punkte $x=0$ von Null verschieden, so dass auf einem den Punkt $x=0$ umgebenden Flächenstück der Quotient $\frac{1}{\sqrt{1+a_1x+a_2x^2+\cdots}}$ gleich einer convergenten Reihe $1+a_1'x+a_2'x^2+\cdots$ gesetzt werden kann. Auf diese Weise erhält man, indem man bestimmt, dass die Integrationsconstante gleich Null genommen werden soll, die Gleichung

$$\int\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int\frac{1+a_1'x+a_2'x^2+\cdots}{x}dx = \log x + a_1'x + \tfrac{1}{2}a_2'x^2 + \cdots,$$

und daher nach (21.)

$$\xi = xe^{a_1'x+\frac{1}{2}a_2'x^2+\frac{1}{3}a_3'x^3+\cdots}.$$

Innerhalb des angeführten Gebietes ist somit ξ eine eindeutige stetige Function von x. Für $x=0$ ist $\xi=0$; und ebenso entspricht dem Werthe $\xi=0$ nur der Werth $x=0$, da die Reihe $a_1'x+\frac{1}{2}a_2'x^2+\cdots$ auf dem betrachteten Flächen-

stück nicht unendlich, also die Exponentialfunction nicht gleich Null ist. Setzt man den erhaltenen Werth von ξ in die Gleichung (21.)

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\sqrt{f(x)}}{\xi} = \frac{x\sqrt{1+a_1x+a_2x^2+\cdots}}{\xi}$$

ein, so hat man

$$\frac{dx}{d\xi} = \sqrt{1+a_1x+a_2x^2+\cdots}\; e^{-a'_1x-\frac{1}{2}a'_2x^2-\cdots}.$$

Da aber die rechte Seite dieser Gleichung in der Umgebung des Punktes $x=0$ stetig und eindeutig ist, so ist nach dem bekannten, an die *Taylor*sche Reihe anknüpfenden Satze von *Cauchy* auch x daselbst eine eindeutige und stetige Function von ξ, welche durch eine convergente, nach positiven Potenzen von ξ fortschreitende Reihe dargestellt wird. Das Anfangsglied der letzteren ist die erste Potenz von ξ mit dem Coefficienten 1; denn $\frac{dx}{d\xi}$ nimmt, der obigen Gleichung gemäss, den Werth 1 an, wenn ξ, und daher auch x, gleich 0 wird. Somit ist x einer convergenten Reihe

$$x = \xi\{1+a''_1\xi+a''_2\xi^2+\cdots\}$$

gleichzusetzen.

Den erhaltenen Werth von x führt man in die Coefficienten der Gleichung (22.), $\left(f(x)\frac{d\chi}{d\xi}+g(x)\right)\chi$ und $h(x)$, ein. Die Functionen $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ sind nach der Voraussetzung auf einem endlichen Gebiet in der Umgebung von $x=0$ stetige und eindeutige Functionen von x. Diesem Gebiete in der x-Ebene entspricht in der ξ-Ebene ein den Punkt $\xi=0$ enthaltendes Flächenstück, dessen Begrenzung überall einen endlichen Abstand vom Punkt $\xi=0$ hat. Die Functionen $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ sind daher in der Umgebung von $\xi=0$ eindeutige und stetige Functionen von ξ, die in convergente, nach positiven Potenzen von ξ fortschreitende Reihen entwickelt werden können. Eine ebensolche Function ist $\chi = \frac{d\xi}{dx}$, da

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{\xi}{\sqrt{f(x)}} = \frac{\xi}{x}(1+a'_1x+a'_2x^2+\cdots) = \frac{1+a'_1x+a'_2x^2+\cdots}{1+a''_1\xi+a''_2\xi^2+\cdots}$$

ist, und dasselbe gilt folglich von dem Differentialquotienten $\frac{d\chi}{d\xi}$. Die Anfangspotenzen der Entwicklungen von $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ nach Potenzen von ξ haben, da $x=\xi(1+a''_1\xi+\cdots)$ gefunden wurde, dieselben Coefficienten, wie die Anfangspotenzen der entsprechenden Entwicklungen nach x; die Function

$f(x)$ beginnt mit ξ^2, $g(x)$ mit $b\xi$. Die Function $\chi = \frac{d\xi}{dx}$ nimmt, wie aus dem obigen Ausdruck folgt, für $\xi = 0$ den Werth 1 an. Auf diese Weise ergiebt sich für den Ausdruck $\left(f(x)\frac{d\chi}{d\xi} + g(x)\right)\chi$ eine convergente Reihe von der Form

$$b\xi + b'_1\xi^2 + b'_2\xi^3 + \cdots;$$

die Entwicklung von $h(x)$ werde durch $c'_1\xi + c'_2\xi^2 + \cdots$ bezeichnet. Die Constanten $b, b'_1, b'_2, \ldots c'_1, c'_2, \ldots$ sind sämmtlich von m unabhängig. Die Differentialgleichung (22.) wird hierdurch

$$\xi^2\frac{d^2P_m}{d\xi^2} + (b\xi + b'_1\xi^2 + \cdots)\frac{dP_m}{d\xi} + (c'_1\xi + c'_2\xi^2 + \cdots)P_m = m(m+b-1)P_m,$$

und hat somit, wie behauptet wurde, in Bezug auf ξ genau dieselbe Gestalt, wie die Differentialgleichung (2.) in Bezug auf x. — Die Functionen P_m, welche in ihrer Entwicklung nach ξ die Form $\xi^m\{1 + k'_1\xi + k'_2\xi^2 + \cdots\}$ haben, behalten die nämliche Form auch für die Entwicklung nach x, so dass zur vollständigen Bestimmung der die Gleichung (20.) befriedigenden Function P_m die Bedingung (3.)

$$P_m(x) = x^m\{1 + k_1x + k_2x^2 + \cdots\}$$

hinzutritt.

Durch den geführten Nachweis übertragen sich alle Schlussfolgerungen, zu denen die Differentialgleichung (2.) Veranlassung gab, unmittelbar auf die allgemeineren, durch die Gleichung (20.) definirten Functionen P, wenn man dieselben als Functionen von ξ auffasst. Jede in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige und stetige Function $\varphi(x)$ lässt sich folglich nach diesen Functionen in eine convergente Reihe $\beta_0P_0(x) + \beta_1P_1(x) + \beta_2P_2(x) + \cdots$ entwickeln, und die Begrenzung des Convergenzgebietes der letzteren Reihe ist in der ξ-Ebene ein Kreis. Um das Convergenzgebiet derselben in der x-Ebene zu finden, hat man nur festzustellen, welche Curve in der x-Ebene einem Kreise in der ξ-Ebene entspricht. Setzt man $x = s + it$, $\xi = \sigma + i\tau$, wo s, t, σ, τ reelle Grössen bedeuten, so hat man einerseits in der Gleichung (21.) Reelles und Imaginäres zu trennen, andererseits $\sigma^2 + \tau^2$ constant zu nehmen; aus den drei Gleichungen erhält man, nach Elimination von σ und τ, eine Gleichung zwischen s und t. Die Curve, welche das Convergenzgebiet der Reihe $\beta_0P_0(x) + \beta_1P_1(x) + \cdots$ in der x-Ebene begrenzt, wird also durch die Gleichungen

$$(23.)\quad \begin{cases} \sigma + i\tau = (s+it)\,e^{a'_1(s+it) + \frac{1}{2}a'_2(s+it)^2 + \cdots}, \\ \sigma^2 + \tau^2 = \text{Const.} \end{cases}$$

bestimmt. Dieselbe hängt ausschliesslich von der Function $f(x)$, dem Coefficienten der höchsten Ableitung in (20.), ab.

Für die Bestimmung der Coefficienten β ist hier ebenfalls die im zweiten Abschnitt angegebene Methode anwendbar. Man definirt die Ergänzungsfunction $Q_n(x)$ durch die Differentialgleichung

$$(24.)\qquad \frac{d^2}{dx^2}(f(x)Q_n)-\frac{d}{dx}(g(x)Q_n)+(h(x)-n(n+b-1))Q_n = \begin{cases}0\\ Ax^\gamma,\end{cases}$$

indem man gleichzeitig die Bedingung stellt, dass $Q_n(x)$ durch eine convergente Reihe von der Form

$$Q_n(x) = x^{-n-1}\{1+K_1x+K_2x^2+\cdots\}$$

darstellbar sei. Die rechte Seite von (24.) ist gleich Null zu nehmen, wenn b nicht ganzzahlig ist, dagegen gleich Ax^γ, wenn b eine positive ganze Zahl ist.

Es ist leicht zu sehen, dass auf (20.) und (24.) genau die Schlüsse des §. 7 anwendbar sind, wodurch die Gleichungen (14.)

$$[P_m(x)Q_n(x)]_{-1}=0,\qquad [P_m(x)Q_m(x)]_{-1}=1$$

erhalten wurden. Es bleibt nur übrig, zu zeigen, dass derartige convergente Reihen $Q_n(x)=x^{-n-1}\{1+K_1x+\cdots\}$ stets existiren. Dieser Beweis ist jedoch schon durch den §. 6 gegeben. Denn lässt man die Bedingung, dass die Constanten b, b_1, ... c_1, c_2, ... nicht von m abhängig sein dürfen, ausser Betracht, so sind die für P und Q gegebenen Gleichungen (20.) und (24.) nicht allgemeiner als die früheren Definitionsgleichungen (2.) und (9.), respective (11.), und nehmen durch Division mit $x^{-2}f(x)=1+a_1x+a_2x^2+\cdots$ die Gestalt der letzteren an. Die Forderung, dass jene Constanten von m unabhängig seien, ist für den Convergenzbeweis der Reihe $\beta_0P_0(x)+\beta_1P_1(x)+\cdots$ von Wichtigkeit, der hier bereits gegeben ist. Bei den übrigen Fragen kann man die Schlussfolgerungen direct auf die Gleichungen (20.) und (24.) übertragen. Dies gilt namentlich von dem Beweise der Existenz des particulären Integrals $Q_n(x)=x^{-n-1}\{1+K_1x+\cdots\}$, da bei demselben die Frage, ob die Constanten b, b_1, ... c_1, c_2, ... von m abhängig sind oder nicht, gar nicht in Betracht kommt. Auf diese Weise sind die Gleichungen (14.) auch für den vorliegenden Fall bewiesen, woraus die Bestimmung der Coefficienten β mittelst der Gleichung (15.) folgt. Hierdurch gelangt man dann zu dem Resultat: dass die Formel (19.) auch für den Fall, dass die Functionen P und Q durch (20.) und (24.) definirt sind, gültig ist.

§. 14. In gewissen Fällen ist die Differentialgleichung der Ergänzungsfunction $Q_m(x)$ mit der von $P_m(x)$ identisch. Damit dies eintrete, muss

$$g(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

sein, wodurch die homogene Gleichung (24.)

$$f(x)\frac{d^2Q_m}{dx^2}+(2f'(x)-g(x))\frac{dQ_m}{dx}+(f''(x)-g'(x)+h(x)-m(m+b-1))Q_m = 0$$

in die Gleichung (20.) für die Function $P_m(x)$ übergeht.

Zu dieser Bedingung treten noch andere. Es war $f(x)=x^2+a_1x^3+\cdots$, $g(x)=bx+b_1x^2+\cdots$ gesetzt worden, so dass, wenn man $g(x)$ gleich $f'(x)$ annimmt, die Constante b gleich 2 wird. Sobald aber b eine positive ganze Zahl bedeutet, ist die rechte Seite von (24.) nicht gleich Null, sondern gleich Ax^γ zu nehmen. Die verlangte Uebereinstimmung der Gleichungen (20.) und (24.) kann also nur dann stattfinden, wenn die Constante A gleich Null wird.

Nun wurde am Schluss des §. 11 gezeigt, dass die in der Gleichung (11.) vorkommende Constante A immer verschwindet, wenn $g(x)$ eine ungrade, $h(x)$ eine grade Function, und b eine grade Zahl bedeutet, weil dieser Fall auf den eines nicht ganzzahligen b reducirbar ist. Dieselben Betrachtungen sind auf die allgemeinere Gleichung (24.) anwendbar, wenn man letztere durch $x^{-2}f(x)$ dividirt, wie am Schluss des vorigen Paragraphen näher ausgeführt wurde. Da $g(x)$ gleich $f'(x)$ gesetzt worden ist, muss $f(x)$ eine grade Function sein, damit $g(x)$ eine ungrade sei. Ist ausserdem $h(x)$ eine grade Function von x, so sind die oben citirten Bedingungen erfüllt, und man erhält für $P_m(x)$ und $Q_m(x)$ die gemeinsame Differentialgleichung

$$f(x)\frac{d^2y}{dx^2}+f'(x)\frac{dy}{dx}+h(x)y = m(m+1)y,$$

in der man die zwei ersten Terme in $\frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{dy}{dx}\right)$ zusammenfassen kann.

Definirt man also die Function $P_m(x)$ durch die Differentialgleichung

$$(25.)\qquad \frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{dP_m}{dx}\right)+h(x)P_m = m(m+1)P_m,$$

in welcher $f(x)$ und $h(x)$ zwei beliebige convergente Reihen von der Form

$$f(x) = x^2(1+a_2x^2+a_4x^4+\cdots),$$
$$h(x) = c_2x^2+c_4x^4+c_6x^6+\cdots$$

bezeichnen, so ist die Ergänzungsfunction $Q_m(x)$ ein zweites particuläres Integral dieser Differentialgleichung. Von den beiden Functionen $P_m(x)$ und

$Q_m(x)$ enthält stets die eine nur grade, die andere nur ungrade Potenzen von x, entsprechend dem Umstande, dass die Gleichung (25.) sich bei einem Zeichenwechsel von x nicht ändert. Es ist also:

$$P_m(x) = x^m\{1+k_2x^2+k_4x^4+\cdots\},\quad Q_m(x) = x^{-m-1}\{1+K_2x^2+K_4x^4+\cdots\}.$$

Die Integrale der Gleichung (25.) sind in den erwähnten Eigenschaften den Kugelfunctionen erster und zweiter Art analog. Es möge bemerkt werden, dass die Differentialgleichung der Kugelfunctionen

$$\frac{d}{dt}\left[(t^2-1)\frac{dy}{dt}\right] = m(m+1)y$$

durch die Substitution $t=\frac{1}{x}$, $y=xY$ in eine Gleichung übergeht, welche mit der Gleichung (25.) für $f(x)=x^2-x^4$, $h(x)=-2x^2$ identisch ist.

Abschnitt IV.

Speciellere Gleichungen; Ausdruck für $\frac{1}{t-x}$.

§. 15. Als Beispiel für die in den vorstehenden Abschnitten entwickelte Theorie sollen zwei specielle Differentialgleichungen behandelt werden, in denen die Coefficienten Binome sind. Man betrachtet die Differentialgleichungen

$$(26.)\quad (x^2+ax^3)\frac{d^2P_m}{dx^2}+(bx+b_1x^2)\frac{dP_m}{dx}+cxP_m = m(m+b-1)P_m,$$

$$(27.)\quad (x^2+ax^4)\frac{d^2P_m}{dx^2}+(bx+b_1x^3)\frac{dP_m}{dx}+cx^2P_m = m(m+b-1)P_m,$$

welche insofern zwei besonders einfache Fälle der Differentialgleichung (2.) darstellen, als die recurrirenden Gleichungen zwischen den Coefficienten k, respective K, nur je zwei dieser Grössen enthalten. Die Constanten a, b_1, c sind ganz beliebig; die Constante b ist der Einschränkung unterworfen, dass sie weder eine negative ganze Zahl noch Null sein darf.

Die Function $Q_n(x)$ wurde, wenn b eine positive ganze Zahl war, in §. 6 durch die nicht homogene Differentialgleichung (11.) definirt, in welcher der Summandus Ax^γ so zu bestimmen war, dass das allgemeine Integral von (11.) keine Logarithmen enthielt. Der Exponent γ wurde in §. 6 gleich $n+b-2$ gesetzt, jedoch wurde gleichzeitig ausgeführt, dass für viele Gleichungen die Wahl einer niedrigeren Potenz von x zweckmässiger sei. Auf Letzteres soll bei den vorliegenden beiden Beispielen näher eingegangen

werden; der Exponent γ wird theils gleich 0, theils gleich 1 genommen, wodurch es gelingt, für $Q_n(x)$ eine ganze rationale Function von $\frac{1}{x}$ zu erhalten. Die Einführung der nicht homogenen Differentialgleichung (11.) für $Q_n(x)$ bezog sich auf den Fall eines ganzzahligen b; indessen gelten die folgenden Entwicklungen auch ebenso für gebrochene und complexe Werthe von b. — Durch die für Ax^γ getroffene Wahl erhalten die durch (26.) und (27.) definirten Functionen P und ihre Ergänzungsfunctionen Q die Eigenschaft, dass

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} P_\mu(x)\,Q_\mu(t) = \frac{1}{t-x}$$

ist, woraus sich eine Bestätigung der Formel (19.) ergiebt.

Man definire die zu (26.) gehörige Ergänzungsfunction $Q_n(x)$ durch die Differentialgleichung

$$(28.)\quad \frac{d^2}{dx^2}[(x^2+ax^3)Q_n]-\frac{d}{dx}[(bx+b_1x^2)Q_n]+cxQ_n = n(n+b-1)Q_n+A,$$

und die zu (27.) gehörige durch

$$(29.)\quad \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}[(x^2+ax^4)Q_n]-\frac{d}{dx}[(bx+b_1x^3)Q_n]+cx^2Q_n \\ \qquad = n(n+b-1)Q_n+\begin{cases} A' \text{ wenn } n \text{ ungrade,} \\ A''x \text{ wenn } n \text{ grade.} \end{cases} \end{cases}$$

Durch passende Bestimmung der Constanten A, A', A'' reducirt sich die Reihe $Q_n(x)$ auf die ersten $n+1$ Terme.

Zur Ermittlung der Werthe von $k_1, k_2, \ldots K_1, K_2, \ldots$ führt man in die Differentialgleichungen (26.) und (28.), respective (27.) und (29.), die Reihen für $P_m(x)$ und $Q_n(x)$ ein. Um die Coefficienten k und K für die verschiedenen Werthe von m und n von einander zu unterscheiden, fügt man einen zweiten Index hinzu und setzt:

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \quad x^m\{1+k_{1,m}x+k_{2,m}x^2+\cdots+k_{\nu,m}x^\nu+\cdots\}, \\ Q_n(x) &= x^{-n-1}\{1+K_{1,n}x+K_{2,n}x^2+\cdots+K_{\nu,n}x^\nu+\cdots\}. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (26.) ergiebt sich für die Coefficienten k die Relation

$$k_{\nu,m} = -\frac{(m+\nu-1)(m+\nu-2)a+(m+\nu-1)b_1+c}{\nu(2m+b+\nu-1)}k_{\nu-1,m}.$$

Setzt man der Abkürzung halber

$$\mu(\mu-1)a+\mu b_1+c = s_\mu,$$

so folgt, da $k_{0,m}=1$ ist, für $k_{\nu,m}$ die Gleichung:

$$k_{\nu,m} = \frac{(-1)^\nu s_m s_{m+1} s_{m+2} \dots s_{m+\nu-1}}{\nu!(2m+b)(2m+b+1)\dots(2m+b+\nu-1)}.$$

Aus der zugehörigen Gleichung (28.) erhält man, wenn die Reihe für Q_n eingesetzt wird, durch Annullirung des Coefficienten von $x^{\nu-n-1}$ die Gleichung

$$K_{\nu,n} = \frac{s_{n-\nu}}{\nu(2n+b-\nu-1)} K_{\nu-1,n}.$$

Eine Ausnahme bildet jedoch der Werth $\nu = n+1$, für welchen man, in Folge des Zutretens der Constante A, die Gleichung

$$-(n+1)(n+b-2)K_{n+1,n} + s_{-1}K_{n,n} = A$$

erhält. Für $\nu = 1, 2, \dots n$ findet man, da $K_{0,n} = 1$ ist,

$$K_{\nu,n} = \frac{s_{n-1}s_{n-2}s_{n-3}\dots s_{n-\nu}}{\nu!(2n+b-2)(2n+b-3)\dots(2n+b-\nu-1)}.$$

Nun bestimme man A durch die Gleichung

$$A = s_{-1}K_{n,n} = \frac{s_{-1}s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}{n!(n+b-1)(n+b)\dots(2n+b-2)};$$

dann wird $K_{n+1,n} = 0$, und in Folge der obigen recurrirenden Gleichung verschwinden auch alle weiteren Coefficienten, so dass man hat:

$$0 = K_{n+1,n} = K_{n+2,n} = K_{n+3,n} = \cdots.$$

Es ist allerdings zu bemerken, dass in dem Fall, wo b eine positive ganze Zahl ist, der Coefficient $K_{2n+b-1,n}$ willkürlich bleibt, weil sein Factor in der Bestimmungsgleichung verschwindet; man setzt aber fest, dass derselbe für die betrachtete Reihe Q_n gleich Null genommen werden möge. Die Reihen Q sind hiernach:

$$Q_0(x) = \frac{1}{x},\quad Q_1(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{s_0}{b}\frac{x}{1}\right),\quad Q_2(x) = \frac{1}{x^3}\left(1 + \frac{s_1}{b+2}\frac{x}{1} + \frac{s_1 s_0}{(b+2)(b+1)}\frac{x^2}{1.2}\right), \dots$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{x^{n+1}}\left\{1 + \frac{s_{n-1}}{2n+b-2}\frac{x}{1} + \frac{s_{n-1}s_{n-2}}{(2n+b-2)(2n+b-3)}\frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{s_{n-1}s_{n-2}\dots s_0}{(2n+b-2)\dots(n+b-1)}\frac{x^n}{n!}\right\}.$$

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für die Gleichungen (27.) und (29.). Man erkennt leicht, dass in den Reihen P_m und Q_n die Coefficienten mit ungradem Index gleich Null werden, weil die linken Seiten jener Differentialgleichungen unverändert bleiben, wenn $-x$ an Stelle von x tritt. Für die übrigen Coefficienten folgt aus (27.)

$$k_{2\nu,m} = \frac{(-1)^\nu s_m s_{m+2} s_{m+4} \dots s_{m+2\nu-2}}{2.4.6\dots 2\nu.(2m+b+1)(2m+b+3)\dots(2m+b+2\nu-1)}.$$

Die Gleichung (29.) giebt die recurrirende Gleichung

$$K_{2\nu,n} = \frac{s_{n-2\nu}}{2\nu(2n+b-2\nu-1)} K_{2\nu-2,n},$$

welche jedoch für einen Werth von ν nicht gilt, nämlich für $\nu = \frac{n+1}{2}$, wenn n ungrade, und für $\nu = \frac{n+2}{2}$, wenn n grade ist. Für $2\nu \leqq n$ ergiebt sich

$$K_{2\nu,n} = \frac{s_{n-2}s_{n-4}s_{n-6}\dots s_{n-2\nu}}{2.4.6\dots 2\nu.(2n+b-3)(2n+b-5)\dots(2n+b-2\nu-1)},$$

während die Coefficienten mit höherem Index durch passende Bestimmung der Constanten A' und A'' gleich Null gemacht werden. Für ein ungrades n hat man

$$-(n+1)(n+b-2)K_{n+1,n} + s_{-1}K_{n-1,n} = A'$$

und für ein grades n

$$-(n+2)(n+b-3)K_{n+2,n} + s_{-2}K_{n,n} = A''.$$

Bestimmt man A' und A'' durch die Gleichungen

$$A' = s_{-1}K_{n-1,n}, \quad A'' = s_{-2}K_{n,n},$$

oder

$$A' = \frac{s_{-1}s_1 s_3 s_5 \dots s_{n-2}}{2.4.6\dots(n-1)(n+b)(n+b+2)\dots(2n+b-3)},$$

$$A'' = \frac{s_{-2}s_0 s_2 s_4 \dots s_{n-2}}{2.4.6\dots n.(n+b-1)(n+b+1)\dots(2n+b-3)},$$

so verschwinden wieder sämmtliche Coefficienten K, deren erster Index grösser als n ist, und man erhält für die durch (29.) definirten Functionen Q die Ausdrücke:

$$Q_0(x) = \frac{1}{x}, \quad Q_1(x) = \frac{1}{x^2},$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{x^3}\left\{1 + \frac{s_0}{b+1}\,\frac{x^2}{2}\right\}, \quad Q_3(x) = \frac{1}{x^4}\left\{1 + \frac{s_1}{b+3}\,\frac{x^2}{2}\right\}, \quad \text{etc.}$$

§. 16. Man stellt sich die Aufgabe, in der Summe $\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty} P_\nu(x)Q_\nu(t)$ die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x zu bestimmen. Zur Durchführung dieser Rechnung benutzt man einen Hülfssatz über die Binomialcoefficienten.

Man nenne σ eine beliebige Constante, α und β zwei positive ganze Zahlen, von denen α die grössere sein möge; ferner bezeichne man durch $[\sigma]_\alpha$ kurz den Zähler des Binomialcoefficienten $(\sigma)_\alpha$, also

$$(\sigma)_\alpha = \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-\alpha+1)}{1.2\dots\alpha}, \quad [\sigma]_\alpha = \sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-\alpha+1).$$

$(\sigma)_0$ und $[\sigma]_0$ bedeuten die Zahl 1. Dann besteht die Gleichung:

$$(30.)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{[\sigma]_\alpha}-\frac{(\alpha)_1}{[\sigma+1]_{\alpha-1}[\sigma-\alpha+1]_1}+\frac{(\alpha)_2}{[\sigma+2]_{\alpha-2}[\sigma-\alpha+3]_2}-\frac{(\alpha)_3}{[\sigma+3]_{\alpha-3}[\sigma-\alpha+5]_3}\\&\quad+\cdots+\frac{(-1)^\beta(\alpha)_\beta}{[\sigma+\beta]_{\alpha-\beta}[\sigma-\alpha+2\beta-1]_\beta}=\frac{(-1)^\beta(\alpha-1)_\beta}{[\sigma+\beta]_\alpha},\end{aligned}\right.$$

welche leicht durch Induction zu beweisen ist. Angenommen, die Gleichung sei richtig für irgend einen Werth von β, so ist sie auch für den um Eins grösseren Werth $\beta+1$ gültig. Durch Einführung von $\beta+1$ an Stelle von β ändert sich die linke Seite von (30.) nur insofern, als ein neuer Summandus hinzutritt; dieselbe wird unter Berücksichtigung der Voraussetzung, dass für β die Gleichung gelten soll, gleich dem Ausdruck

$$\frac{(-1)^{\beta+1}(\alpha)_{\beta+1}}{[\sigma+\beta+1]_{\alpha-\beta-1}[\sigma-\alpha+2\beta+1]_{\beta+1}}+\frac{(-1)^\beta(\alpha-1)_\beta}{[\sigma+\beta]_\alpha}$$

oder

$$\frac{(-1)^{\beta+1}(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-\beta)}{(\beta+1)!(\sigma+\beta+1)(\sigma+\beta)\dots(\sigma-\alpha+\beta+1)}\{\alpha(\sigma-\alpha+2\beta+2)-(\beta+1)(\sigma+\beta+1)\}.$$

Da aber die in der Klammer stehende Differenz gleich $(\alpha-\beta-1)(\sigma-\alpha+\beta+1)$ ist, so erhält man

$$\frac{(-1)^{\beta+1}(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-\beta-1)}{(\beta+1)!(\sigma+\beta+1)(\sigma+\beta)\dots(\sigma-\alpha+\beta+2)}\quad\text{oder}\quad\frac{(-1)^{\beta+1}(\alpha-1)_{\beta+1}}{[\sigma+\beta+1]_\alpha},$$

was mit der rechten Seite von (30.) übereinstimmt, wenn $\beta+1$ statt β gesetzt wird. Da nun für $\beta=0$ die Gleichung (30.) sich ohne Weiteres als gültig ergiebt, so ist dieselbe für beliebige Werthe von β, die kleiner als α sind, bewiesen.

Die Entwicklung gilt noch für $\beta=\alpha$, in welchem Falle die rechte Seite von (30.) gleich Null wird; ausgenommen ist der Werth $\alpha=0$, für den sich die Gleichung auf $1=1$ reducirt. Der Fall $\beta=\alpha$ folgt aus dem, wo $\beta=\alpha-1$ ist. Denn für $\beta=\alpha-1$ wird die rechte Seite gleich $\frac{(-1)^{\alpha-1}}{[\sigma+\alpha-1]_\alpha}$, und dieser Werth, auf die linke Seite geschafft, ist grade gleich demjenigen Summandus, welcher für $\beta=\alpha$ zu dem für $\beta=\alpha-1$ gebildeten Ausdruck hinzutreten muss. Auf diese Weise ergiebt sich die Gleichung

$$(31.)\qquad \sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha}\frac{(-1)^\beta(\alpha)_\beta}{[\sigma+\beta]_{\alpha-\beta}[\sigma-\alpha+2\beta-1]_\beta}=0,$$

in welcher σ eine ganz beliebige Constante, α irgend eine positive ganze Zahl, mit Ausschluss der Null, bedeutet.

§. 17. Man bestimme in der unendlichen Reihe

$$P_0(x)Q_0(t)+P_1(x)Q_1(t)+\cdots+P_\mu(x)Q_\mu(t)+\cdots \quad \text{in inf.}$$

den Coefficienten von x^μ. Da $P_{\mu+1}(x)$, $P_{\mu+2}(x)$, ... diese Potenz nicht enthalten, ergiebt sich der Ausdruck

$$k_{\mu,0}Q_0(t)+k_{\mu-1,1}Q_1(t)+\cdots+k_{\mu-m,m}Q_m(t)+\cdots+Q_\mu(t),$$

von welchem gezeigt werden soll, dass er sich auf $t^{-\mu-1}$ reducirt. Man bilde in demselben den Coefficienten von $t^{-\nu-1}$, zu dem, wie leicht zu sehen, nur die Functionen $Q_\nu(t)$, $Q_{\nu+1}(t)$, ... $Q_\mu(t)$ beitragen. Die Zahl ν ist höchstens gleich μ; für $\nu=\mu$ ist der Factor gleich 1, da $t^{-\mu-1}$ nur als Anfangsglied von $Q_\mu(t)$ vorkommt. In allen übrigen Fällen ist der gesuchte Coefficient von $x^\mu t^{-\nu-1}$ durch die Summe $\sum\limits_{m=\nu}^{m=\mu} k_{\mu-m,m}K_{m-\nu,m}$ gegeben. Für die Gleichungen (26.) und (28.) ist der allgemeine Term derselben nach §. 15 gleich

$$\frac{(-1)^{\mu-m}s_m s_{m+1}\dots s_{\mu-2}s_{\mu-1}}{(\mu-m)!(2m+b)(2m+b+1)\dots(m+b+\mu-1)}\,\frac{s_{m-1}s_{m-2}\dots s_{\nu+1}s_\nu}{(m-\nu)!(2m+b-2)(2m+b-3)\dots(m+b+\nu-1)}.$$

Man erkennt, dass das Product $s_{\mu-1}s_{\mu-2}\dots s_{\nu+1}s_\nu$ vor das Summenzeichen tritt. Ausserdem nehme man den Factor $\frac{(-1)^{\mu-\nu}}{(\mu-\nu)!}$ heraus, unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\frac{1}{(\mu-m)!}\,\frac{1}{(m-\nu)!}=\frac{1}{(\mu-\nu)!}(\mu-\nu)_{m-\nu}.$$

Abgesehen von dem vor das Summenzeichen getretenen Factor ist die Summe alsdann

$$\sum_{m=\nu}^{m=\mu}\frac{(-1)^{m-\nu}(\mu-\nu)_{m-\nu}}{(m+b+\mu-1)(m+b+\mu-2)\dots(2m+b)(2m+b-2)(2m+b-3)\dots(m+b+\nu-1)}.$$

Setzt man hierin $\mu-\nu=\alpha$, $m-\nu=\beta$, $b+\mu+\nu-1=\sigma$, so erhält man den Ausdruck

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha}\frac{(-1)^\beta(\alpha)_\beta}{[\sigma+\beta]_{\alpha-\beta}[\sigma-\alpha+2\beta-1]_\beta},$$

welcher nach der Formel (31.) identisch Null ist, sobald $\alpha>0$, also $\mu>\nu$ ist.

Für die Gleichungen (27.) und (29.) sind die Entwicklungen ganz analog; man hat daselbst die graden und die ungraden Potenzen von x zu unterscheiden, kann aber in beiden Fällen mit Hülfe der Formel (31.) zeigen, dass nur die Producte $x^\mu t^{-\mu-1}$ einen von Null verschiedenen Coefficienten haben.

Auf diese Weise gewinnt man für die durch (26.) und (28.) oder durch (27.) und (29.) definirten Functionen P und Q die Gleichung

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} P_\mu(x) Q_\mu(t) = \frac{1}{t} + \frac{x}{t^2} + \frac{x^2}{t^3} + \cdots + \frac{x^\mu}{t^{\mu+1}} + \cdots$$

oder

$$(32.) \qquad \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} P_\mu(x) Q_\mu(t) = \frac{1}{t-x}.$$

Diese Gleichung wurde bekanntlich zuerst von Herrn *Heine* für die Kugelfunctionen bewiesen und von Herrn *C. Neumann* zur Ableitung der nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen angewendet.

Man erkennt, dass die Gleichung (32.) den Satz (19.) für die hier behandelten specielleren Functionen P und Q bestätigt, und dass auch für eine beliebige Function $\Phi(x)$, die auf einer ringförmigen, den Nullpunkt umgebenden Fläche eindeutig und stetig ist, eine Entwicklung erhalten wird. Indem man, nach bekannter Methode, das geschlossene Integral von $\frac{\Phi(t)dt}{t-x}$ über die Begrenzung des Ringes bildet, welches den Werth $2\pi i \Phi(x)$ hat, und andererseits die Gleichung (32.) zweimal anwendet, einmal für $\text{mod.}\,t > \text{mod.}\,x$ und einmal für $\text{mod.}\,t < \text{mod.}\,x$, gelangt man bei Benutzung der hier eingeführten Bezeichnung zu der Gleichung:

$$(33.) \qquad \Phi(x) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \{[\Phi(t) Q_\mu(t)]_{-1} P_\mu(x) + [\Phi(t) P_\mu(t)]_{-1} Q_\mu(x)\}.$$

Die Convergenz der Entwicklungen, sowie der zur Herleitung der Formel (33.) erforderliche Nachweis, dass die Reihenfolge von Summation und Integration geändert werden kann, ergiebt sich aus den Ungleichheiten (7.) und (16.), welche die Kleinheit des Restes beweisen. Als die einfachsten Functionen P und Q, welche durch die Gleichungen (26.) und (28.) definirt sind, dürften die Reihen

$$P_m(x) = x^m \left\{1 - \frac{m+1}{2m+2} \frac{x}{1} + \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+2)(2m+3)} \frac{x^2}{1.2} - \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{(2m+2)(2m+3)(2m+4)} \frac{x^3}{3!} + \cdots \text{in inf.}\right\},$$

$$Q_m(x) = \frac{1}{x^{m+1}} \left\{1 + \frac{m}{2m} \frac{x}{1} + \frac{m(m-1)}{2m(2m-1)} \frac{x^2}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2m(2m-1)(2m-2)} \frac{x^3}{3!} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{m(m-1)\dots 1}{2m(2m-1)\dots(m+1)} \frac{x^m}{m!}\right\}$$

zu bezeichnen sein, welche für $a=0$, $b=2$, $b_1=1$, $c=1$ erhalten werden. In diesem Falle ist die Differentialgleichung für Q_m homogen, da A gleich

Null wird, und geht in die zugehörige Differentialgleichung von P_n durch Einführung von $-x$ statt x über. Auch bestehen zwischen je drei auf einander folgenden P oder Q alsdann einfache recurrirende Gleichungen. Diese Reihen kommen in der *Poisson*schen Wärmetheorie vor; sie stehen in einer einfachen Beziehung zu den Functionen P, die durch die Gleichung (27.) für $a=0$, $b=2$, $b_1=0$, $c=1$ bestimmt werden, und die, abgesehen von einem Factor x, von *Poisson* in den §§. 79—82 der Wärmetheorie behandelt worden sind.

Unter den durch die Gleichung (27.) definirten Functionen sind sodann besonders die *Bessel*schen Functionen zu nennen, die für $a=0$, $b=1$, $b_1=0$, $c=1$ erhalten werden. Für dieselben hat Herr *C. Neumann* die Ergänzungsfunctionen Q_n aufgestellt und die Gleichung (32.) bewiesen. Die von ihm definirten Functionen $O^n(x)$ sind, bis auf einen constanten Factor, mit den durch die Gleichung (29.) für die angegebenen Werthe von a, b, b_1, c bestimmten Functionen $Q_n(x)$ identisch.

Berlin, im Juli 1871.

Bemerkung über die ebenen Schnitte der Flächen zweiten Grades.

(Von Herrn *Mertens* in Krakau.)

Setzt man zur Abkürzung

$$ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'zx+2c'xy = f(x, y, z),$$

$$axx'+byy'+czz'+a'(yz'+zy')+b'(zx'+xz')+c'(xy'+yx') = f\binom{x'\,y'\,z'}{x\;y\;z},$$

$$f(\lambda, \mu, \nu) = l,$$

$$(bc-a'^2)\lambda^2+(ca-b'^2)\mu^2+(ab-c'^2)\nu^2+2(b'c'-aa')\mu\nu+2(c'a'-bb')\nu\lambda+2(a'b'-cc')\lambda\mu = L;$$

$$\lambda x+\mu y+\nu z = \overline{u},$$

$$(1.)\qquad f(x, y, z)+l\overline{u}^2-2\overline{u}f\binom{xyz}{\lambda\mu\nu} = \varphi(x, y, z),$$

wo λ, μ, ν die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche eine gegebene Richtung mit den Coordinatenaxen bildet, und nimmt zu λ, μ, ν sechs Zahlen λ', μ', ν', λ'', μ'', ν'' hinzu, welche mit denselben die Identität

$$(2.)\qquad (\lambda u+\lambda' v+\lambda'' w)^2+(\mu u+\mu' v+\mu'' w)^2+(\nu u+\nu' v+\nu'' w)^2 = u^2+v^2+w^2$$

erfüllen, so findet man leicht, wenn die Function $f(x, y, z)$ der Substitution

$$(3.)\qquad \begin{cases} x = \lambda u+\lambda' v+\lambda'' w, \\ y = \mu u+\mu' v+\mu'' w, \\ z = \nu u+\nu' v+\nu'' w \end{cases}$$

unterworfen wird,

$$(4.)\qquad x^2+y^2+z^2 = u^2+v^2+w^2,$$

$$(5.)\qquad f(x, y, z) = lu^2+mv^2+nw^2+2l'vw++2m'uw+2n'uv,$$

$$(6.)\qquad l+m+n = f(\lambda, \mu, \nu)+f(\lambda', \mu', \nu')+f(\lambda'', \mu'', \nu'') = a+b+c,$$

$$mn-l'^2 = f(\lambda', \mu', \nu')f(\lambda'', \mu'', \nu'')-f\binom{\lambda''\mu''\nu''}{\lambda'\mu'\nu'}^2$$

$$= (bc-a'^2)(\mu'\nu''-\nu'\mu'')^2+(ca-b'^2)(\nu'\lambda''-\lambda'\nu'')^2+\cdots$$

$$\cdots+2(a'b'-cc')(\mu'\nu''-\nu'\mu'')(\nu'\lambda''-\lambda'\nu'')$$

und wegen $\mu'\nu''-\nu'\mu'' = \pm\lambda$, $\nu'\lambda''-\lambda'\nu'' = \pm\mu$, $\lambda'\mu''-\mu'\lambda'' = \pm\nu$

$$(7.)\qquad mn-l'^2 = L.$$

Ferner ist

$$lu+n'v+m'w = uf\binom{\lambda\mu\nu}{\lambda\mu\nu}+vf\binom{\lambda'\mu'\nu'}{\lambda\mu\nu}+wf\binom{\lambda''\mu''\nu''}{\lambda\mu\nu} = f\binom{xyz}{\lambda\mu\nu},$$

somit nach (5.), (3.), (1.)

$$f(x, y, z) = mv^2+nw^2+2l'vw+2u(lu+n'v+m'w)-lu^2$$
$$= mv^2+nw^2+2l'vw+2\bar{u}f\binom{xyz}{\lambda\mu\nu}-l\bar{u}^2,$$
$$\varphi(x, y, z) = mv^2+nw^2+2l'vw,$$

und wenn diese Gleichung von der mit einem willkürlichen Factor s multiplicirten Identität (4.)

$$x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2 = v^2+w^2$$

abgezogen wird,

$$(8.)\qquad s(x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2)-\varphi(x, y, z) = (s-m)v^2+(s-n)w^2-2l'vw.$$

Die adjungirten Formen der in (8.) auf beiden Seiten stehenden quadratischen Formen müssen nach einem bekannten Satze einander gleich sein; die adjungirte Form der rechten Seite ist aber einfach

$$((s-m)(s-n)-l'^2)u^2,$$

welcher Ausdruck nach (6.), (7.) übergeht in

$$(s^2-(a+b+c-l)s+L)\bar{u}^2.$$

Bezeichnen daher G, H die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(9.)\qquad 0 = s^2-(a+b+c-l)s+L,$$

so verschwindet die adjungirte Form von

$$s(x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2)-\varphi$$

identisch für $s=G$ und $s=H$, und es sind demzufolge die Ausdrücke

$$\frac{G(x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2)-\varphi}{G-H},\qquad \frac{H(x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2)-\varphi}{H-G}$$

vollständige Quadrate. Ueberdies ist identisch

$$(10.)\qquad \begin{cases} s(x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2)-\varphi = (s-G)\left[\dfrac{H(x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2)-\varphi}{H-G}\right] \\ \qquad\qquad +(s-H)\left[\dfrac{G(x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2)-\varphi}{G-H}\right], \end{cases}$$

weil diese in Bezug auf s lineare Gleichung für $s=G$ und $s=H$ erfüllt ist.

Sollen nun die Zahlen λ', μ', ν', λ'', μ'', ν'' ausser (2.) noch die Bedingung

$$l' = f\binom{\lambda''\mu''\nu''}{\lambda'\mu'\nu'} = 0$$

erfüllen, so hat man nach (8.), (10.)

$$(11.)\quad \begin{cases} (s-m)v^2+(s-n)w^2 = (s-G)\left[\dfrac{H(x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2)-\varphi}{H-G}\right] \\ \qquad\qquad +(s-H)\left[\dfrac{G(x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2)-\varphi}{G-H}\right], \end{cases}$$

und man schliesst erstens aus der Gleichung

$$(s-m)(s-n) = s^2-(a+b+c-l)s+L = (s-G)(s-H) \quad [(6.), (7.), (9.)]$$

$m = G$, $n = H$, zweitens aus (11.) für $s = H$ und $s = G$ resp.

$$v^2 = \frac{H(x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2)-\varphi}{H-G}, \quad w^2 = \frac{G(x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2)-\varphi}{G-H}.$$

Umgekehrt ist, wenn man

$$(12.)\quad \sqrt{\frac{H(x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2)-\varphi}{H-G}} = \bar{v}, \quad \sqrt{\frac{G(x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2)-\varphi}{G-H}} = \bar{w}$$

macht, nach (10.) identisch

$$s(x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2)-\varphi(x, y, z) = (s-G)\bar{v}^2+(s-H)\bar{w}^2,$$

und daher wegen der Willkürlichkeit von s

$$x^2+y^2+z^2-\bar{u}^2 = \bar{v}^2+\bar{w}^2,$$
$$\varphi(x, y, z) = G\bar{v}^2+H\bar{w}^2,$$

oder endlich nach (1.)

$$x^2+y^2+z^2 = \bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2,$$
$$f(x, y, z) = -l\bar{u}^2+G\bar{v}^2+H\bar{w}^2+2\bar{u}f\begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix}.$$

Legt man senkrecht zur Richtung (λ, μ, ν) eine Ebene, so sind die Hauptaxen des Kegelschnittes, in welchem diese Ebene die gegebene Fläche zweiten Grades

$$0 = ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'zx+2c'xy+2a''x+2b''y+2c''z+d$$

schneidet, den Richtungen $\bar{v}$, $\bar{w}$ (12.) parallel.

Krakau, im März 1872.

